Intégration et Probabilités

THOMAS DUQUESNE (thomas.duquesne@upmc.fr), bureau V7 ENS et 2-17 Jussieu (tour 16-26)

On veut définir des mesurses (exemple : longueurs sur $\mathbb{R}$, surfaces sur $\mathbb{R}^2$, etc.)

Soit E un ensemble et $\mathcal{E}$ une classe de sous-ensembles. On définit :

$$\mu : \begin{array}{l} \mathcal{E} \to [0, +\infty[\\ A \in \mathcal{E} \mapsto \mu(A) \end{array}$$

$\mu(A)$ est la μ-mesure de A.

Intuitions : $\mu(\varnothing) = 0$; $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Rapport avec les probas : définissons

- Ω ensemble de tous les résultats possibles d'un phénomène aléatoire
- $\mathcal{F}$ une classe de sous-ensembles de Ω, appellés évennements.
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ une mesure ($\mathbb{P}(\Omega) = 1$). Si A est un évennement, $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité que A survienne.

Partie 1. Théorie de la mesure et intégration

I. Intégration.

I.1. Ensembles mesurables

Déf. Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{P}(E)$ la classe de tous les sous-ensembles de E.

Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ une classe de sous-ensembles de E. C'est une *tribu* (ou une sigma-algèbre) si :

1. $E \in \mathcal{E}$
2. $\mathcal{E}$ est stable par passage au complémentaire ($\forall A \in \mathcal{E}, E \backslash A \in \mathcal{E}$).
3. $\mathcal{E}$ est stable par union dénombrable : $\forall A_n \in \mathcal{E}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$

Remarque : 1. et 2. impliquent $\varnothing \in \mathcal{E}$. On a également $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}$.

Si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{E}$, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$ car $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = E \backslash \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E \backslash A_n$

Exemple : $\mathcal{P}(E)$ est une tribu.

Exemple : $\mathcal{E} = \{\varnothing, E\}$ est une tribu dite grossière

Exemple : si E est infini, la classe $\mathcal{E}$ des ensembles dénombrables ou de complémentaire dénombrable est une tribu.

Lemme. Soit $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de tribus sur E, alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i = \{A \subset E \,|\, \forall i \in I, A \in \mathcal{E}_i\}$ est une tribu (classe de Moore).

Déf. Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(E)$ une classe d'ensembles quelconques de E. On pose :

$$\sigma(\mathcal{R}) = \bigcap_{\mathcal{E} \text{ tribu tq } \mathcal{R} \in \mathcal{E}} \mathcal{E}$$

$\sigma(\mathcal{R})$ est une tribu, dite *tribue engendrée* par $\mathcal{R}$ (ie la plus petite tribu qui contient $\mathcal{R}$).

Tribus boréliennes

Déf. Soit E non vide, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ une classe d'ensembles. C'est une *topologie* si :

1. $\varnothing \in \mathcal{T} \wedge E \in \mathcal{T}$
2. $(\forall i \in I, U_i \in \mathcal{T}) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$
3. $\forall U, V \in \mathcal{T}, U \cap V \in \mathcal{T}$

Les ensembles de $\mathcal{T}$ sont les *ouverts* de $\mathcal{T}$. Le complémentaire d'un ouvert est un *fermé*.

Ex. U est un ouvert sur $\mathbb{R}$ ssi U est une union dénombrable d'intervalles ouverts (disjoints deux à deux).

Déf. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. La *tribu des Boréliens* de $(E, \mathcal{T})$ est la tribu engendrée par $\mathcal{T}$, notée $\mathcal{B}(E)$: $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{T})$.

Lemme. Posons $\mathcal{R} = \{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$. Alors $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Preuve. $\mathbb{R} \backslash]-\infty, a] =]a, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Donc $]-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc on a $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par définition de la notion de tribu engendrée.

Montrons l'inclusion contraire.

$]-\infty, a[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-\infty, a - \frac{1}{n}] \in \sigma(\mathcal{R})$

$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[$

Tout ouvert est union dénombrable de $]a_n, b_n[$ donc appartient à $\sigma(\mathcal{R})$

$\mathcal{T}_\mathbb{R} \subset \sigma(\mathcal{R}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{T}_\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{R})$

Rmq. De même, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendré par des intervalles du style $]-\infty, a]$ ou $[b, +\infty[$, $]b, +\infty[$, $]a, b[$, $[a, b[$, etc., et même par $]-\infty, a[, a \in \mathbb{Q}$.

Sur un E.V réel de dimension finie, les normes sont équivalentes. Toutes les normes conduisent à la même dopologie, appellée *topologie de la norme*. On parle des Boréliens de cet espace vectoriel de dimension finie comme des boréliens associés à la topologie de la norme : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, ...

Boréliens de $\mathbb{R}^2$.

On prend comme norme : $x = (x_1, x_2), \|x\| = \max(|x_1|, |x_2|)$.

$U \in \mathbb{R}^2$ ouvert : si $x \in U, \exists r > 0 |\,]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[\subset U$

$U = \bigcup_{x \in I}]a_x, b_x[\times]c_x, d_x[$, avec $a_x, b_x, c_x, d_x \in \mathbb{Q}$ (ensemble dénombrable de quadruplets).

Tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une union dénombrable de rectangles ouverts $]a, b[\times]c, d[$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

Preuve en exo, en raisonnant comme dans le lemme précédent.

Lemme. Si $\mathcal{R} = \{]a, b[\times]c, d[, a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$, alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{R})$.

Remarque culturelle. $\text{card}(E) < \text{card}(\mathcal{P}(E))$. On s'attend à ce que $\text{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) > \text{card}(\mathbb{R})$, or il y a égalité !

Il existe donc des sous ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des Boréliens, mais il est très difficile d'en exhiber un « naïvement » (récurrence transfinie).

Tribu trace et topologie relative

Déf. $(E, \mathcal{T})$ espace topologique. $\mathcal{E}$ une tribu sur E, $A \subset E$.

$\mathcal{T}_A = \{A \cap U, U \in \mathcal{T}\}$ est une topologie sur A, c'est la topologie $\mathcal{T}$ *relative* sur A.

$\mathcal{E}_A = \{A \cap B, B \in \mathcal{E}\}$ est une tribu appellé *tribu trace* de $\mathcal{E}$ sur A.

Lemme. La trace sur A des boréliens associés à $\mathcal{T}$ est la tribu Borélienne associée à la topologie relative de $\mathcal{T}$ sur A, ie : $\mathcal{B}(\mathcal{T}_A) = \{A \cap B, B \in \mathcal{E}\}$

Preuve laissée en exercice.

Classe monotone

Déf. Soit E un ensemble non vide. $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(E)$ est un *pi-système* si :

1. $E \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}, A \cap B \in \mathcal{P}$

$\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(E)$ est une *classe monotone* si :

1. $E \in \mathcal{L}$
2. $\mathcal{L}$ est stable par différence propre, ie $A \subset B \in \mathcal{L} \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{L}$
3. $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable croissante.

Ex. $\mathcal{P} = \{\mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$ est un pi-système.

Ex. $\mathcal{E}$ tribu $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ classe monotone.

Lemme. $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ une famille de classes monotones. Alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{L}_i$ est aussi une classe monotone (preuve en exercice).

Déf. Soit $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(E)$ quelconque. On pose $\lambda(\mathcal{R}) = \bigcap_{\mathcal{L} \text{ classe monotone tq } \mathcal{R} \subset \mathcal{L}} \mathcal{L}$. C'est la *classe monotone engendrée* par $\mathcal{R}$, ou plus petite classe monotone contenant $\mathcal{R}$.

Lemme. Soit $\mathcal{L}$ une classe monotone. Si elle est stable par intersection simple, c'est une tribu.

Preuve.

- $A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{L}$ car $A \cup B = E \backslash (E \backslash A) \cap (E \backslash B)$
- Soit $B_n \in \mathcal{L}$. Posons $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k \in \mathcal{L}$
  $\underbrace{\bigcup_{n \geqslant 0} A_n}_{\in \mathcal{L}} = \bigcup B_n \in \mathcal{L}$

Théorème de la classe monotone. Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(E)$ un pi-système et $\mathcal{L}$ une classe monotone.

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{L} \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$$

Preuve. $\mathcal{P} \subset \lambda(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$. Il suffit de remarquer que $\lambda(\mathcal{P})$ est une tribu, car alors : $\sigma(\mathcal{P}) \subset \lambda(\mathcal{P})$ par définition de $\sigma(\mathcal{P})$.

Par le lemme précédent, il suffit que $\lambda(P)$ soit stable par intersection simple.

$\mathcal{L}_A = \{B \subset E \,|\, A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})\}$

Montrons : Si $A \in \lambda(\mathcal{P})$, alors $\mathcal{L}_A$ est une classe monotone.

$A \in \lambda(\mathcal{P})$, $E \in \mathcal{L}_A$, $B, C \in \mathcal{L}_A$ tels que $B \subset C$, $(C \backslash B) \cap A = \underbrace{(C \cap A)}_{\in \lambda(\mathcal{P})} \backslash \underbrace{(B \cap A)}_{\in \lambda(\mathcal{P})}$

$\Rightarrow (C \backslash B) \cap A \in \lambda(\mathcal{P})$ et $(C \backslash B) \in \mathcal{L}_A$

Soit $B_n \in \mathcal{L}_A$ avec $B_n \subset B_{n+1}$

$A \cap \left(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\right) = \bigcup \left(\underbrace{A \cap B_n}_{\in \lambda(\mathcal{P})}\right) \Rightarrow A \cap (\bigcup B_n) \in \lambda(\mathcal{P}) \Rightarrow \bigcup B_n \in \mathcal{L}_A$.

$\mathcal{P}$ est un pi-système, donc $\mathcal{P} \subset \lambda(\mathcal{P})$.

$\forall A \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \subset \underbrace{\mathcal{L}_A}_{\text{classe monotone par ce qui précède}} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{P}$, $\lambda(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}_A \Rightarrow \forall A \in \mathcal{P}$, $\forall B \in \lambda(\mathcal{P})$, $A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})$

$\forall B \in \lambda(\mathcal{P}), \mathcal{P} \subset \underbrace{\mathcal{L}_B}_{\text{classe monotone}} \Rightarrow \forall B \in \lambda(\mathcal{P}), \lambda(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}_B \Rightarrow \forall A \in \lambda(\mathcal{P}), \forall B \in \lambda(\mathcal{P}), A \cap B \in \lambda(P)$

2013-09-25

1.2. Mesures positives

On adjoint ∞ à $\mathbb{R}_+$. L'ensemble résultant est noté $[0, \infty]$. On prolonge $<$ par $\forall x \in [0, \infty[, x < \infty$.

Convention. $x + \infty = \infty + x = \infty$ et $0 \times \infty = 0$

La notion de convergence pour une suite $a_n \in [0, \infty], n \in \mathbb{N}$ est la notion habituelle.

Faits.

1. Si $a_n \leqslant a_{n+1}$ alors $\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in [0, \infty]$ (cette limite existe toujours)

2. Si $a_n \in [0, \infty], n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n \geqslant 0} a_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k$ existe toujours dans $[0, \infty]$

   On a que $\sum_{n \geqslant 0} a_n = \sup_{S \subset \mathbb{N}, S \text{ fini}} \sum_{k \in S} a_k$

3. Soit $a_n \in [0, \infty], n \in \mathbb{N}$. Soit $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Alors $\sum_{n \geqslant 0} a_n = \sum_{n \geqslant 0} a_{\gamma(n)}$.

4. Soit $a_{n,m} \in [0, \infty], m, n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{n \geqslant 0} \sum_{m \geqslant n} a_{n,m} = \sum_{m \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} a_{n,m}$.

Preuves laissées en exo.

Déf. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable ($\mathcal{E}$ est une tribu). Soit $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$. On dit que μ est une *mesure positive* si :

1. $\mu(\varnothing) = 0$

2. Pour toute suite d'ensembles $A_n \in \mathcal{E}$ telle que $n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \varnothing$ (ils sont deux à deux disjoints), on a $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$: propriété de *sigma-additivité*.

Conséquences immédiates.

- Soient $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $A \cap B = \varnothing$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$: propriété d'*additivité* de μ. (dans (2), prendre $A_0 = A, A_1 = B$ et $\forall n \geqslant 2, A_n = \varnothing$)

- Soient A, $B \in \mathcal{E}$ tels que $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \backslash A)$ et $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$. On a donc $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geqslant \mu(A)$

  $\forall A, B \in \mathcal{E}, (A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B))$: μ est croissante pour l'inclusion.

  Remarque : si $A \subset B$, on a $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$, mais si $\mu(A) = \mu(B) = \infty$, alors on ne peut rien dire sur $\mu(B \backslash A)$. Si ils sont finis, on peut dire $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Prop. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré ($\mathcal{E}$ tribu, μ mesure positive). Soit $A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$.

1. Si $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, alors $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$
2. Si $A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ et $\mu(A_0) < \infty$, alors $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$
3. $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$: propriété de *sigma sous-additivité*.

Preuve.

1. On suppose $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. On pose $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \backslash A_{n-1}, n \geqslant 1$. Les $B_n \in \mathcal{E}$.

   $B_n = A_n \cap (E \backslash A_{n-1})$; les B_n sont disjoints deux à deux et $\bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_n$.

   On a donc $\bigcup_{n \geqslant 0} B_n = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n$.

   Donc $\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 0} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\right) \overset{\text{sigma-additivité}}{=} \sum_{n \geqslant 0} \mu(B_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) \overset{\text{additivité}}{=} \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$

2. Se déduit de (1) par passage au complémentaire. (exercice : attention voir la remarque)

3. Si $A, B \in \mathcal{E}$, $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$ (on peut définir $B \backslash A = B \cap (E \backslash A)$ même si $A \not\subseteq B$).

   $$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \leqslant \mu(A) + \mu(B) \tag{1}$$

   On pose $C_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{E}$. On a $C_n \subset C_{n+1}$ et $\bigcup_{n \geqslant 0} C_n = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n$.

   Par (1), $\mu(C_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$.

   $\mu(\bigcup A_n) = \mu(\bigcup C_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(C_n)$ par (1)

   $\sum_{n \geqslant 0} \mu(A_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$

   Donc $\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 0} A_n\right) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \mu(A_n)$.

Exemples.

1. E muni de $\mathcal{P}(E) = \{A \subset E\}$.

   On pose $\mu(A) = 0, \forall A \in \mathcal{P}(A)$. C'est une mesure positive, appellée mesure nulle.

2. E muni de $\mathcal{P}(E)$.

   Si $A \neq \varnothing$, on pose $\mu(A) = \infty$ et $\mu(\varnothing) = \varnothing$. C'est la mesure infinie.

3. E muni de $\mathcal{P}(E)$. On se donne $x \in E$.

   Quel que soit $A \subset E$, on pose $\delta_x(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$.

   On vérifie que $\delta_x : \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ est une mesure positive. C'est la *masse de Dirac* en x.

4. E muni de $\mathcal{P}(E)$.

   Pour tout $A \subset E$, on pose $\#(A) = \begin{cases} \infty \text{ si } A \text{ est infini} \\ p \text{ si } A \text{ a exactement } p \text{ éléments} \end{cases}$.

   On vérifie que $\#: \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ est une mesure positive, qui est appellé *mesure de comptage*.

Prop. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

1. Soit $\mu_n : \mathcal{E} \to [0, \infty], n \in \mathbb{N}$ une suite de mesures positives et soit $c_n \in \mathbb{R}, n \geqslant 0$.

   Soit $\mu(A) = \sum_{n \geqslant 0} c_n \, \mu_n(A)$. (rappel : $0 \times \infty = 0$)

   Alors $\mu: \mathcal{E} \to [0, \infty]$ est une mesure positivé notée $\mu = \sum_{n \geqslant 0} c_n \, \mu_n$

2. Soit $B \in \mathcal{E}$. Soit $\mu: \mathcal{E} \to [0, \infty]$ une mesure positive.

   $\forall A \in \mathcal{E}$, on pose $\nu(A) = \mu(A \cap B)$. ν est une mesure positive qui est appelllée la restriction de μ à B, notée $\nu = \mu(\cdot \cap B)$.

Preuve. (2) laissé en exo. Preuve de (1) :

Soient $A_p \in \mathcal{E}, p \in \mathbb{N}$ deux à deux disjoints.

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p \right) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \, \mu_n\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_n \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \sum_{p \in \mathbb{N}} \mu_n(A_p) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \, \mu_n(A_p) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{N}} \mu(A_p) \end{aligned}$$

Vocabulaire. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

- Si $\mu(E) = 1$, on dit que μ est une *mesure de probabilité* (ou loi de probabilité).
- $\mu(E)$ est appellée *masse* de μ. Si $\mu(E) < \infty$, on dit que E est *de masse finie*, ou on dit que la mesure μ est *finie*.
- S'il existe des ensembles $E_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ tels que $\mu(E_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$ et $E = \bigcup_{n \geqslant 0} E_n$, on dit que μ est *sigma-fini*.
- $x \in E$ tel que $\{x\} \in \mathcal{E}$ est un *atome* de μ si $\mu(\{x\}) > 0$.
- Une mesure sans atome est *diffuse*.

Prop. Pour une mesure sigma-finie, il y a toujours un nombre dénombrable d'atomes.

Exemple. Si E est infini non dénombrable, alors la mesure de comptage $\#: \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ n'est pas sigma-finie, et tout point $x \in E$ est un atome car $\#(\{x\}) = 1 > 0$.

Lemme. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Il y a équivalence entre :

1. μ est sigma-fini
2. $\exists A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ avec $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{n \geqslant 0} A_n = E$ et $\mu(A_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$
3. $\exists B_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ deux à deux disjoints tels que $E = \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$ et $\mu(B_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$

Preuve laissée en exo.

Théorème. On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ désigne la tribu des Boréliens de $\mathbb{R}$, ie la tribu engendré par les ouverts. Alors :

1. Il existe une unique mesure positive $l\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ telle que $\forall a,\, b \in \mathbb{R},\, a \leqslant b$ on a $l(]a,b]) = b - a$. C'est la *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à droite et croissante. Alors il existe une unique mesure positive $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ telle que $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b$, on a $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$. μ est la *mesure de Stieltjes* associée à F, et est souvement notée dF.

Remarques.

1. Si $F(x) = x$, $dF = l$

2. Si $F(x) = \lfloor x \rfloor$, $dF = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ (exercice)

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique mesure $l_n\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ telle que $l(]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$, avec $a_n \leqslant b_n$ dans $\mathbb{R}$.

Remarques. $l_1 = l$

En dimension deux, $l_2(]a,b] \times]c,d]) = (b-a)\,(d-c)$, c'est la mesure de l'aire.

Théorème d'unicité du prolongement des mesures. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{P}$ un pi-système tel que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{E}$. Soit μ_1, μ_2 deux mesures positives. On suppose que $\forall A \in \mathcal{P}$, $\mu_1(A) = \mu_2(A)$.

1. Si $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$, alors $\mu_1 = \mu_2$.

2. S'il existe $E_n \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}$ tels que $E_n \subset E_{n+1}$ et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$, alors $\mu_1 = \mu_2$.

Preuve de (1). On suppose que $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$.

On note $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{E} \colon \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Par hypothèse, $\mathcal{P} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{E}$.

Montrons que $\mathcal{L}$ est une classe monotone :

- $E \in \mathcal{L}$

- Soient $A, B \in \mathcal{L}$, tels que $A \subset B$. Comme μ_1 et μ_2 sont finies, on peut écrire :

  $\mu_1(B \backslash A) = \mu_1(B) - \mu_1(A) = \mu_2(B \backslash A) = \mu_2(B) - \mu_2(A)$, donc $B \backslash A \in \mathcal{L}$

- Soient $A_n \in \mathcal{L}, n \in \mathbb{N}$ tels que $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

  $\mu_1\big(\bigcup_{n\geqslant 0} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(A_n) = \mu_2\big(\bigcup_{n\geqslant 0} A_n\big)$, donc $\bigcup_{n\leqslant 0} A_n \in \mathcal{L}$.

$\mathcal{L}$ est bien une classe monotone. Puisque $\mathcal{P}$ est un pi-système contenu dans $\mathcal{L}$, le théorème de la classe monotone implique $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$, c'est à dire $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$, mais $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ par définition, donc $\mathcal{E} = \mathcal{L} \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2$. $\square$

Preuve de (2). On pose :

$\mu_{1,n} = \mu_1(\cdot \cap E_n)$, $\mu_{2,n} = \mu_2(\cdot \cap E_n)$

- $\mu_{1,n}(E) = \mu_{2,n}(E) < \infty$

- $\forall A \in \mathcal{P}$, comme $E_n \in \mathcal{P}$, on a $A \cap E_n \in \mathcal{P}$ et donc $\mu_{1,n}(A) = \mu_{2,n}(A)$.

Par le point (1), $\mu_{1,n}=\mu_{2,n}, n\in\mathbb{N}$.

$\forall B\in\mathcal{E}, \forall n\in\mathbb{N}, \mu_1(B\cap E_n)=\mu_2(B\cap E_n)$

$(B\cap E_n)\subset(B\cap E_{n+1})$ et $\bigcup_{n\geqslant 0} B\cap E_n=B$.

$\forall B\in\mathcal{E},\ \mu_1(B)=\lim_{n\to\infty}\mu_1(B\cap E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_2(B\cap E_n)=\mu_2(B)$. $\square$

Preuve de l'unicité de la mesure de Lebesgue. Soit $\lambda:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to[0,\infty]$ telle que $\forall a,b\in\mathbb{R}, a\leqslant b$ on ait $\lambda(]a,b])=b-a$.

On pose $\mathcal{P}=\{R\}\cup\{]a,\,b],\,a,\,b\in\mathbb{R},\,a\leqslant b\}$. $\mathcal{P}$ est un pi-système. On montre facilement que $\sigma(\mathcal{P})=\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On pose $E_n=]-n,\,n],\,n\in\mathbb{N}$. $E_n\subset E_{n+1}$, $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ et $l(E_n)=\lambda(E_n)=2\ n$. De plus $\lambda(\mathbb{R})=\lim_{n\to\infty}\lambda(E_n)=l(\mathbb{R})=\lim_{n\to\infty}l(E_n)=\infty$. Les mesures l et λ coincident sur $\mathcal{P}$ satisfaisant le point (2) du théorème de l'unicidé du prolongement des mesures, donc $\lambda=l$. $\square$

2013-09-30

I.3. Fonctions mesurables

Soient E, E' et $f:E\to E'$

Notation. $B\subset E'$, $f^{-1}(B)=\{x\in E: f(x)\in B\}$.

$f^{-1}(B)$ estappellé *pré-image* de B par$f$, notée souvent $f^{-1}(B)=\{f\in B\}$.

Rappels. Soient $B_i\subset E', i\in I$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)=\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

$$E\backslash f^{-1}(B)=f^{-1}(E\backslash B)$$

Déf. Soient $(E,\mathcal{E})$ et $(E',\mathcal{E}')$ deux espaces mesurables, soit $f:E\to E'$. f est dite $(\mathcal{E},\mathcal{E}')$-mesurable si $\forall B\in\mathcal{E}', f^{-1}(B)\in\mathcal{E}$.

Convention. Si $E'=\mathbb{R}$, $[-\infty,\infty]$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{R}^n$, on dit que f est $\mathcal{E}$-mesurable pour dire que f est $(\mathcal{E},\mathcal{B}(E'))$-mesurable. ($\mathcal{E}'$ = boréliens de E')

On a souvent des problèmes avec les images directes, on s'intéresse donc principalement aux images réciproques.

Quand on a des fonctions à valeurs réelles, il faut utiliser les boréliens comme tribu de mesure pour ne pas avoir de problèmes.

Remarque. Plus $\mathcal{E}'$ est grosse, moins il y a de fonctions $E\to E'$ mesurables. Plus $\mathcal{E}$ est grosse, plus il y a de fonctions $E\to E'$ mesurables.

En particulier, $\forall\mathcal{E}',\ f:E\to E'$ est $(\mathcal{P}(E),\mathcal{E}')$-mesurable. De meme, $\forall\mathcal{E},\ f:E\to E'$ est $(\mathcal{E},\{\varnothing,E'\})$-mesurable.

Lemme. $(E,\mathcal{E})$ et $(E',\mathcal{E}')$ deux espaces mesurables. Soit $\mathcal{R}'\subset\mathcal{E}'$ une classe quelconque telle que $\sigma(\mathcal{R}')=\mathcal{E}'$. Alors $f:E\to E'$ est $(\mathcal{E},\mathcal{E}')$-mesurable ssi $\forall C\in\mathcal{R}', f^{-1}(C)\in\mathcal{E}$.

Preuve. On pose $\mathcal{G}'=\{B\in\mathcal{E}': f^{-1}(B)\in\mathcal{E}\}$. On vérifie facilement que $\mathcal{G}'$ est une tribu sur $\mathcal{E}'$ (en exercice). De plus, $\mathcal{R}'\subset\mathcal{G}'$ donc $\sigma(\mathcal{R}')=\mathcal{E}'\subset\sigma(\mathcal{G}')=\mathcal{G}'$, donc $\mathcal{G}'=\mathcal{E}'$. $\square$

Exemple. $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable. Soit $f: E\to\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma(\{]-\infty,a],a\in\mathbb{R}\})$. f est $\mathcal{E}$-mesurable ssi $\forall a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty,a])\in\mathcal{E}$.

Notation. $f^{-1}(]-\infty,a])=\{x\in E: f(x)\leqslant a\}=\{f\leqslant a\}$.

Exemple. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction monotone. $f^{-1}(]-\infty,a])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est donc un borélien, donc f est mesurable. (ie. $(\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable)

Déf. Soient $(E,\mathcal{T})$ et $(E',\mathcal{T}')$ deux espace topologiques. Soit $f: E\to E'$. Alors f est *continue* par rapport à ces deux topologies (on note $(\mathcal{T};,')$-continue) si $\forall U'\in\mathcal{T}'$, $f^{-1}(U')\in\mathcal{T}$.

Corollaire. On a immédiatement : soient $(E,\ \mathcal{T})$ et $(E',\ \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $f: E\to E'$ une fonction $(\mathcal{T},\mathcal{T}')$-continue. Alors f est $(\mathcal{B}(E),\mathcal{B}(E'))$-continue.

Lemme. Soient $(E,\mathcal{E})$, $(E',\mathcal{E}')$ et $(E'',\mathcal{E}'')$ trois espaces mesurables. Soit $f: E\to E'$ une fonction $(\mathcal{E},\mathcal{E}')$-mesurable et $g: E'\to E''$ une fonction $(\mathcal{E}',\mathcal{E}'')$-mesurable. Alors $g\circ f: E\to E''$ est $(\mathcal{E},\mathcal{E}'')$-mesurable.

Preuve. Triviale, les définitions sont faites pour. (exercice)

Somme et produit.

Proposition. Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable. Soit $f,g: E\to\mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{E}$-mesurable. Alors $f+g$ et fg sont $\mathcal{E}$-mesurables.

Preuve. On pose $\mathcal{R}=\{]a,b[\times]c,d[; a,b,c,d\in\mathbb{R}, a\leqslant b, c\leqslant d\}$. On a montré que $\sigma(\mathcal{R})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On pose $h(x)=(f(x),g(x)), x\in E$. $h: E\to\mathbb{R}^2$.

$h^{-1}(]a,b[\times]c,d[)=\{x\in E: (f(x),g(x))\in]a,b[\times]c,d[\}=\underbrace{f^{-1}(]a,b[)}_{\in\mathcal{E}}\cap\underbrace{f^{-1}(]c,d[)}_{\in\mathcal{E}}\in\mathcal{E}$

$\forall R\in\mathcal{R}, h^{-1}(\mathcal{R})\in\mathcal{E}$ donc h est $(\mathcal{E},\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$-mesurable.

On définit add : $\begin{array}{c}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto x+y\end{array}$ et mul : $\begin{array}{c}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,y)\to xy\end{array}$, ce sont deux applications continues donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables.

Or $f+g=\mathrm{add}\circ h$ et $fg=\mathrm{mul}\circ h$, ce sont donc des applications $(\mathcal{E},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables.

Droite numérique achevée.

On adjoint à $\mathbb{R}$ deux points supplémentaires, $-\infty$ et $+\infty$. L'ensemble résultant est noté $[-\infty,+\infty]$, ou parfois $\bar{\mathbb{R}}$. On étend l'ordre à cet ensemble en posant $-\infty\leqslant x\leqslant+\infty,\forall x\in[-\infty,+\infty]$. La notion de convergence de suite dans cet ensemble est la notion habituelle.

Notation. $\min(a,b)=a\wedge b$ et $\max(a,b)=a\vee b$; $(a)_+=\max(a,0)$ et $(a)_-=\max(0,-a)$.

On a toujours $0\leqslant(a)_+\leqslant|a|$ et $0\leqslant(a)_-\leqslant|a|$, $|a|=(a)_++(a)_-$ et $a=(a)_+-(a)_-$ (vrai meme pour $a=\pm\infty$).

Soit $a_n\in[-\infty,\infty], n\in\mathbb{N}$ On pose $\forall n\in\mathbb{N}, r_n=\inf_{p\geqslant n}a_p\in[-\infty,\infty]$ et $s_n=\sup_{k\geqslant p}a_p\in[-\infty,\infty]$.

$r_n\leqslant r_{n+1}$ et $s_n\geqslant s_{n+1}$.

$\lim_{n\infty}\uparrow r_n=\sup_{n\geqslant 0}r_n$ et $\lim_{n\infty}\downarrow s_n=\inf_{n\in\mathbb{N}}s_n$ existent dans $[-\infty,+\infty]$.

On définit.

$$\liminf_{n\to+\infty}a_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{p\geqslant n}a_p=\lim\uparrow_{n\infty}\inf_{p\geqslant n}a_p$$

$$\limsup_{n\to+\infty}=\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{p\geqslant n}a_p=\lim\downarrow_{n\infty}\sup_{p\geqslant n}a_p$$

Propriétés.

- $\liminf_{n\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\infty} a_n$
- $\liminf_{n\infty} a_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de la suite a_n
- $\limsup_{n\infty} a_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite a_n
- $a = \lim_{n\infty} a_n$ existe ssi $\liminf a_n = \limsup a_n$.

Exercices.

1. $\liminf -a_n = -\limsup a_n$

   $\limsup -a_n = -\liminf a_n$

2. Si $a_n \leqslant b_n$ alors $\liminf a_n \leqslant \liminf b_n$ et $\limsup a_n \leqslant \limsup b_n$

3. On suppose qur $\lim_{n\infty} \underbrace{b_n}_{\text{réels}} = b$, alors $\limsup a_n + b_n = b + \limsup a_n$ et $\liminf a_n + b_n = b + \liminf a_n$.

Notation. Soit E un ensemble, $f, g : E \to [-\infty, \infty]$. On note $f \wedge g : E \to [-\infty, \infty] = \min(f, g)$, de meme on définit $f \vee g$, $(f)_+$, $(f)_-$, $|f|$. Pour une suite de fonctions, on définit de meme, de manière ponctuelle, $\sup_{n\geqslant 0} f_n$, $\inf_{n\geqslant 0} f_n$, $\limsup_{n\infty} f_n$, $\liminf_{n\infty} f_n$.

$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ponctuellement signifie $\forall x \in E, \lim_{n\infty} f_n(x)$ existe et vaut $f(x)$. C'est équivalent à $\liminf_{n\infty} f_n = \limsup_{n\infty} f_n = f$.

Proposition. $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. $f, g, f_n : E \to [-\infty, \infty]$ des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables.

1. $f \vee g$, $f \wedge f$, $(f)_+$, $(f)_-$, $|f|$ sont également $\mathcal{E}$-mesurables.
2. $\inf_{n\geqslant 0} f_n$, $\sup_{n\geqslant 0} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ sont $\mathcal{E}$-mesurables.
3. Si $\lim_{n\to\infty} f_n = h$ ponctuellement, alors h est $\mathcal{E}$-mesurable.
4. Si $f_n : E \to [0, \infty], n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n\geqslant 0} f_n : E \to [0, \infty]$ est aussi $\mathcal{E}$-mesurable.

Preuve.

1. $\{f \vee g \leqslant a\} = \{f \leqslant a\} \cap \{g \leqslant a\} \in \mathcal{E}$ donc $f \vee g$ est bien $\mathcal{E}$-mesurable.

   $f \wedge g = -(-f) \vee g$, on applique ce qui précède.

   $(f)_+ = 0 \vee f$ est donc $\mathcal{E}$-mesurable, de meme pour $(f)_- = 0 \vee (-f)$.

   Pour la valeur absolue, $|\cdot| : [-\infty, \infty] \to [0, \infty]$ est continue, donc $|f|$ est $\mathcal{E}$-mesurable.

2. $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leqslant a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leqslant a\} \in \mathcal{E}$. Donc $\sup_{n\geqslant 0} f_n$ est $\mathcal{E}$-mesurable, donc $\inf_{n\geqslant 0} f_n = -\sup_{n\geqslant 0}(-f_n)$ aussi.

   On pose $g_n = \sup_{p\geqslant n} f_p$, c'est $\mathcal{E}$-mesurable par ce qui précède, or $\limsup_{n\infty} f_n = \inf_{n\geqslant 0} g_n$ qui est donc $\mathcal{E}$-mesurable. Pareil pour la $\liminf_{n\infty} f_n$.

3. On a par exemple $h = \limsup_{n\infty} f_n$, elle est donc $\mathcal{E}$-mesurable.

4. On montre d'abord que si $f, g : E \to [0, \infty]$ alors $f + g$ est mesurable : il faut se rammenner au cas réel (en exo).

   $\sum_{n\geqslant 0} f_n = \sup_{n\geqslant 0} (\sum_{k=0}^{n} f_k)$, elle est donc $\mathcal{E}$-mesurable.

Exemples.

1. *Fonctions indicatrices.*

   Soit $A\subset E$. On définit une fonction $\mathbf{1}_A : E\to\mathbb{R}$ par $\mathbf{1}_A=\begin{cases}1 \text{ si } x\in a\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. Cette fonction est appellée *fonction indicatrice* de A.

   $\forall x\in\mathbb{R}, \{\mathbf{1}_A\leqslant a\}=\begin{cases}E\backslash A \text{ si } a<1\\ E \text{ si } a\geqslant 1\end{cases}$, donc $\mathbf{1}_A$ est $\mathcal{E}$-mesurable sur $A\in\mathcal{E}$.

   Si $c\in\mathbb{R}$, $c\cdot\mathbf{1}_A$ est $\mathcal{E}$-mesurable dès que $A\in\mathcal{E}$.

2. *Fonctions étagées (ou simples).*

   Soit $s\colon E\to\mathbb{R}$, s est étagée si elle s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions indicatrices : $s=\sum_{k=0}^n c_k\,\mathbf{1}_{A_k}\,(*)$ avec $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ et $A_1,\ldots,A_n\subset E$.

   s peut s'écrire sous la forme $(*)$ de plusieurs façons en général : $\mathbf{1}_E=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_{E\backslash A}$.

   Si s est étagée, alors son image est un ensemble fini ; la réciproque est vraie : si $\#s(E)<\infty$, alors on indexe sans répétition les valeurs de $s(E)=\{c_1,\ldots,c_n\}$. On pose $A_k=s^{-1}(\{c_k\})$. On retrouve bien $s=\sum_{k=0}^n c_k\,\mathbf{1}_{A_k}$. (remarque : ici on a meme que les A_k sont deux-à-deux disjoints)

   Conséquences.

   a. $s\colon E\to\mathbb{R}$ étagée et $\mathcal{E}$-mesurable peut s'écrire sous la forme $(*)$ avec les $A_k\in\mathcal{E}$.

   b. De plus, si s est positive, alors on peut choisir les coefficients c_k dans $\mathbb{R}^+$.

   Cette classe de fonctions est très importante puisqu'elle permet de faire des approximations :

Proposition. Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable. Soit $f\colon E\to[0,\infty]$ une fonction $\mathcal{E}$-mesurable. Il existe une suite $s_n : E\to\mathbb{R}^+$ de fonctions $\mathcal{E}$-mesurables étagées telles que $0\leqslant s_n\leqslant s_{n+1}\leqslant f$ et $\lim_{n\to\infty} s_n=\sup_{n\geqslant 0} s_n=f$.

Preuve. Pour tous $k,n\in\mathbb{N}$ on pose :

$$A_{n,k}=\{x\in E\colon k\,2^{-n}\leqslant f(x)<(k+1)\,2^{-n}\}=\{k\,2^{-n}\leqslant f<(k+1)\,2^{-n}\}$$

$$B_n=\{x\in E\colon f(x)\geqslant n\}=\{f\geqslant n\}$$

À n fixé, les $A_{0,n},\ldots,A_{(n-1)2^n,n}$ et B_n sont dans $\mathcal{E}$ et disjoints deux à deux. On pose :

$$s_n=n\,\mathbf{1}_{B_n}+\sum_{0\leqslant k<n2^n} k\,2^{-n}\,\mathbf{1}_{B_{n,k}}$$

s_n est étagée et $\mathcal{E}$-mesurable.

Si $f(x)<n$, $s_n(x)=2^{-n}\lfloor 2^n f(x)\rfloor\leqslant f(x)$ (on a meme $0\leqslant f(x)-s_n(x)\leqslant 2^{-n}$).

Si $f(x)\geqslant n$, alors $s_n(x)=n$.

On vérifie que $s_n\leqslant s_{n+1}$.

Lemme « technique ». $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable. Soit $f\colon E\to\mathbb{R}^+$ une fonction $\mathcal{E}$-mesurable. Alors il existe $B_n\in\mathcal{E}, n\in\mathbb{N}$ et $c_n\in\mathbb{R}^+, n\in\mathbb{N}$ tels que $f=\sum_{n\geqslant 0} c_n\,\mathbf{1}_{B_n}$.

Preuve. On reprend les s_n de la propriété précédente.

$f=s_0+\sum_{n\geqslant 0}\underbrace{s_n-s_{n-1}}_{\text{fonction étagée } \mathcal{E}\text{-mesurable positive}}$

2013-10-02

I.4. Intégrales

On va définir les intégrales par étapes pour :

1. les fonctions étagées
2. les fonctions positives mesurables
3. les fonctions à valeurs complexes (généralisable à un e.v. de dimension finie)

Dans tout ce qui suit, $(E, \mathcal{E}, \mu)$ est un espace mesuré.

Étape 1.

On note S_+ l'ensemble des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et étagées.

Si $s \in S_+$, alors elle peut s'écrire comme une combinaison linéaire de fonctions indicatrices : $s = \sum_{k \in \{1,\ldots,n\}} c_k \cdot \mathbf{1}_{A_k}$ où $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ et $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}_+$.

Déf. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, on pose $\int_A s\, d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \mu(A_k \cap A) = \int_A s(x) d\mu(x)$.

On a la convention $0 \times \infty = 0$. L

a notation $d\mu$ est une notation symbolique commode, on pourrait écrire $d\mu(x)$, ou $\mu(\mathrm{dx})$, ou un certain nombre d'autres écritures.

Cette écriture suggère que l'intégrale ne dépend pas de l'écriture particulière de s comme somme.

Cohérence de la définition de $\int_A s\, d\mu$.

On pose $s(E) = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p\}$ avec $\gamma_i < \gamma_{i+1}$. Pour tout $l \in \{1, \ldots, p\}$, on pose $B_l = s^{-1}(\{\gamma_l\}) \in \mathcal{E}$, et on a $s = \sum_{l=1}^p \gamma_l \mathbf{1}_{B_l}$.

Pour $l \in \{1, \ldots, p\}$, on pose $I_l = \{k \in \{1, \ldots, n\} : c_k = \gamma_l\}$. $I_1, \ldots, I_p$ forme une partition de $1, \ldots, n$.

$B_l = \bigcup_{k \in I_l} A_k$, d'où $A \cap B_l = \bigcup_{i\omega I_l} A \cap A_k$.

$$\underbrace{\sum_{l=1}^p \gamma_l\, \mu(B_l \cap A)}_{\substack{\text{ne dépend pas de l'écriture de} \\ s \text{ sous la forme particulière}}} = \sum_{l=1}^p \sum_{k \in I_l} c_k\, \mu(A \cap A_k) = \sum_{i=1}^n c_k\, \mu(A \cap A_k) = \int_A s\, d\mu$$

Propositions.

1. $\forall s_1, s_2 \in S_+, \forall c \in \mathbb{R}_+, \forall A \in \mathcal{E},\ \int_A (s_1 + c\, s_2)\, d\mu = \int_A s_1\, d\mu + c \int_A s_2\, d\mu$
2. $\forall A \in \mathcal{E}, \forall s \in S_+,\ \int_A s\, d\mu = \int_E s\, \mathbf{1}_A\, d\mu$
3. $\forall A \in \mathcal{E},\ \int_E \mathbf{1}_A\, d\mu = \mu(A)$.
4. Si $\mu(A) = 0$, alors $\forall s \in S_+,\ \int_A s\, d\mu = 0$.
5. Soit $s \in S_+$ fixée. $\forall A \in \mathcal{E}$ on pose $\nu(A) = \int_A s\, d\mu$. Alors $\nu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ est une mesure positive.

Preuves.

1. $s_1 = \sum_{k=1}^{n_1} c_k^1 \mathbf{1}_{A_k^1}$, $s_2 = \sum_{k=1}^{n_2} c_k^2 \mathbf{1}_{A_k^2}$ sous la forme $(*)$.

On pose $A^1_{n_1+1} = E \setminus \bigcup_{k=0}^{n_1} A^1_k$ et $c^1_{n_1+1} = 0$, et $A^2_{n_2+1} = E \setminus \bigcup_{k=0}^{n_2} A^2_k$ et $c^2_{n_2+1} = 0$.

Pour $i \in \{1,2\}$, $s_i = \sum_{k=1}^{n_i+1} c^i_k \mathbf{1}_{A^i_k}$.

$s_1 = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n_1+1 \\ 1 \leqslant l \leqslant n_2+1}} c^1_k \mathbf{1}_{A^1_k \cap A^2_l}$ et $s_2 = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n_1+1 \\ 1 \leqslant l \leqslant n_2+1}} c^2_l \mathbf{1}_{A^1_k \cap A^2_l}$ (on est sous la forme $(*)$)

$s_1 + c\, s_2 = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n_1+1 \\ 1 \leqslant l \leqslant n_2+1}} (c^1_k + c\, c^2_l) \mathbf{1}_{A^1_k \cap A^2_l}$

$\int_A (s_1 + c\, s_2)\, d\mu = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n_1+1 \\ 1 \leqslant l \leqslant n_2+1}} (c^1_k + c\, c^2_l)\, \mu(A \cap A^1_k \cap A^2_l) = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n_1+1 \\ 1 \leqslant l \leqslant n_2+1}} c^1_k\, \mu(A \cap A^1_k \cap A^2_l) + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n_1+1 \\ 1 \leqslant l \leqslant n_2+1}} c^2_k\, \mu(A \cap A^1_k \cap A^2_l) = \int_A s_1\, d\mu + c \int_A s_2\, d\mu$.

2. trivial, en exo

3. trivial, en exo

4. trivial, en exo

5. $\nu(\varnothing) = 0$ d'après 4. (ou même par définition). Reste à vérifier la sigma-additivité de ν.

   On se donne $B_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, deux à deux disjoints. On se donne s sous la forme : $s = \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} c_k \mathbf{1}_{A_k}$ sous la forme $(*)$. On pose $B = \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$.

$$\begin{aligned}
\nu(B) &= \int_B s\, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{p} c_k\, \mu\Bigg(\underbrace{B \cap A_k}_{= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \cap A_k} \Bigg) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{n \geqslant 0} c_k\, \mu(A_k \cap B_n) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \sum_{k=1}^{p} c_k\, \mu(A_k \cap B_n) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \int_{B_n} s\, d\mu \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \nu(B_n)
\end{aligned}$$

Étape 2.

Soit $f : E \to [0, \infty]$ une fonction $\mathcal{E}$-mesurable.

Déf. $\forall A \in \mathcal{E}$, on pose $\int_A f\, d\mu = \sup \left\{ \int_A s\, d\mu ; s \in S_+ \text{ telle que } \forall x \in A, 0 \leqslant s(x) \leqslant f(x) \right\}$

On voit que cette notion d'intégrale étend celle de l'étape 1.

Propositions. Soient $f, g : E \to [0, \infty]$, deux fonctions $\mathcal{E}$-mesurables.

1. Soit $A \in \mathcal{E}$, si $f \leqslant g$ alors $\int_A f\, d\mu \leqslant \int_A g\, d\mu$

2. Si $\forall x \in A$, $f(x) = 0$ alors $\int_A f\, d\mu = 0$

3. Si $\mu(A) = 0$, alors $\int_A f\, d\mu = 0$ (quelles que soient les valeurs prises par f)

4. $\int_A f\, d\mu = \int_E f\, \mathbf{1}_A\, d\mu$

5. $\forall c \in \mathbb{R}_+,\ \int_A c\, f\, d\mu = c \int_A f\, d\mu$

Preuves. En exercice.

Théorème de convergence monotone. Soit $f_n : E \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions $\mathcal{E}$-mesurables. On suppose que $f_n \leqslant f_{n+1}$. Alors $\lim\uparrow f_n = f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge ponctuellement et

$$\int_E (\lim\uparrow f_n)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \uparrow \int_E f_n\, d\mu$$

Preuve. On pose $f = \sup f_n : E \to [0, \infty]$, f est $\mathcal{E}$-mesurable et $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ponctuellement.

Comme on a $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$, en intégrant cette inégalité contre μ, on a :

$$\int_E f_n\, d\mu \leqslant \int_E f_{n+1}\, d\mu \leqslant \int_E f\, d\mu$$

On a donc $\lim \int_E f_n\, d\mu \leqslant \int_E f\, d\mu$. Reste à montrer l'inégalité contraire. On va pour cela revenir à la défintion de l'intégrale des fonctions positives.

Fixons $a \in]0, 1[$ et $s \in S_+$ telle que $s \leqslant f$.

On pose $E_n = \{x \in E : f_n(x) \geqslant a\, s(x)\}$. On a $E_n \subset E_{n+1}$. On a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$ (à vérifier en exo).

La fonction $f_n - a\, s : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est bien définie, et est $\mathcal{E}$-mesurable (exercice!).

$E_n = (f_n - a\, s)^{-1}([0, \infty]) \in \mathcal{E}$.

$\forall x \in E,\ f_n(x) \geqslant f_n(x)\, \mathbf{1}_{E_n}(x) \geqslant a\, s(x)\, \mathbf{1}_{E_n}(x)$.

En intégrant cette inégalité, on a $\int_E f_n\, d\mu \geqslant \int_{E_n} f_n\, d\mu \geqslant a \int_{E_n} s\, d\mu$

Si on pose $\nu(A) = \int_A s\ d\mu$, on sait que ν est une mesure, donc $\nu(E) = \nu\big(\bigcup_{n\geqslant 0} E_n\big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$ (par une propriété élémentaire sur les mesures).

Donc $\lim \int_E f_n\, d\mu \geqslant a \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s\, d\mu = a \int_E s\, d\mu$ En passant au sup sur $s \in S_+$ tel que $s \leqslant f$, on a $\lim\uparrow \int_E f_n\, d\mu \geqslant a \int_E f\, d\mu$. On prend le sup sur $a \in]0, 1[$, et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \uparrow \int_E f_n\, d\mu \geqslant \int_E f\, d\mu$$

CQFD. $\square$

Proposition. Soient $f, g : E \to [0, \infty]$ des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables. Soit $c \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$\int_E (f + c\, g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + c \int_E g\, d\mu$$

Preuve. On applique la grande idée de Lebesgue, l'approximation par une suite de fonctions étagées croissantes.

Soient $s_n, s_n' \in S_+$ telles que $0 \leqslant s_n \leqslant s_{n+1} \leqslant f, 0 \leqslant s_n' \leqslant s_{n+1}' \leqslant g$, $\lim\uparrow_{n\infty} s_n = f$ et $\lim\uparrow_{n\infty} s_n' = g$

On sait que $\int_E (s_n + c\ s_n')\ d\mu = \int_E s_n\ d\mu + c \int_E s_n'\ d\mu$. On passe à la limite grâce à la convergence monotone. $\square$

Théorème d'interversion $\boldsymbol{\Sigma}/\int$ positive. Soient $f_n : E \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables. Alors :

$$\int_E \left(\sum_{n\geqslant 0} f_n\right) d\mu = \sum_{n\geqslant 0} \left(\int_E f_n\, d\mu\right)$$

Preuve. On pose $g_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} f_k : E \to [0, \infty]$, $\mathcal{E}$-mesurables. On a $g_n \leqslant g_{n+1}$ et $\lim g_n = \sum_{n \geqslant 0} f_n$ par définition.

$\int (\sum f_n)\, d\mu = \int (\lim g_n)\, d\mu \overset{\text{conv. monotone}}{=} \lim \int g_n\, d\mu = \lim \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \int f_k\, d\mu$

Théorème (lemme de Fatou). Soient $f_n : E \to [0, \infty]$, $\mathcal{E}$-mesurable. Alors :

$$\int_E \left(\liminf_{n \to +\infty} f_n \right) d\mu \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int_E f_n\, d\mu$$

Preuve. On pose $g_n = \sup_{p \geqslant n} f_p$ On a $0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1}$, $g_n \leqslant f_n$ et $\lim\uparrow_{n \to \infty} g_n = \liminf_{n \to \infty} f_n$

$\int (\liminf f_n)\, d\mu = \int (\lim\uparrow g_n)\, d\mu \overset{\text{conv. monotone}}{=} \lim\uparrow \int g_n\, d\mu = \liminf_{n \to \infty} \int g_n\, d\mu \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int f_n\, d\mu$

Notion de μ-presque partout

Déf. Supposons que une propriété P dépend de $x \in E$. On dit que P est vérifiée μ-presque partout (abbrégé en μ-pp) s'il existe $N \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $\forall x \in E \backslash N, P(x)$ est vérifiée.

Ex. $f = g$ μ-presque partout signifie qu'il existe $N \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $\forall x \in E \backslash N, f(x) = g(x)$.

On suppose que $f, g : E \to [0, \infty]$ sont $\mathcal{E}$-mesurables. Dans ce cas, $f = g$ μ-presque partout implique : $\forall A \in \mathcal{E}, \int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$

Preuve. $\int_N f\, d\mu = \int_N g\, d\mu = 0$, or $A \cap N \subset N$ donc $\mu(A \cap N) = 0$. Donc $\int_{A \cap N} f\, d\mu = 0 = \int_{A \cap N} g\, d\mu$, ie $\int_E f\, \mathbf{1}_{A \cap N}\, d\mu = 0 = \int_E g\, \mathbf{1}_{A \cap N}\, d\mu$

$\int_A f\, d\mu = \int f\, (\mathbf{1}_{A \cap N} + \mathbf{1}_{A \cap (E \backslash N)})\, d\mu = \underbrace{\int_E f\, \mathbf{1}_{A \cap N}\, d\mu}_{=0} + \int_E \underbrace{f\, \mathbf{1}_{A \cap (E \backslash N)}}_{= g \mathbf{1}_{A \cap (E \backslash N)}}\, d\mu$

Ex. $\lim_{n \to +\infty} f_n = f$ μ-presque patout signifie que $f = \liminf f_n = \limsup f_n$ μ-presque partout.

Propriétés. $f : E \to [0, \infty]$ $\mathcal{E}$-mesurable.

1. Si $\int_E f\, d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ-preque partout

2. Si $\int_E f\, d\mu < \infty$, alors $f < \infty$ μ-presque partout

Preuve. On pose $A_n = \{f \geqslant 2^{-n}\} \in \mathcal{E}$, $A_n \subset A_{n+1}$ et $\bigcup_{n \geqslant 0} A_n = \{f > 0\}$

On a : $f \geqslant 2^{-n}\, \mathbf{1}_{A_n}$, d'où en intégrant : $\underbrace{\int_E f\, d\mu}_{=0} \geqslant 2^{-n}\, \mu(A_n)$, on a donc $\forall n, \mu(A_n) = 0$

$\mu(\{f > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n \geqslant 0} A_n\right) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$

$\mu(\{f > 0\}) = 0$ signifie que $f = 0$ μ-presque partout.

La preuve du 2. se fait pareil, laissée en exo.

Mesures à densité

Propostion. Soit $f : E \to [0, \infty]$ une fonction $\mathcal{E}$-mesurable. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, on pose $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$. Alors :

1. $\nu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ est une mesure positive appellée mesure ayant une densité f par rapport à μ, et elle est notée en générale $\nu = f\mu$ (on note parfois $d\nu = f\, d\mu$)

2. Si $g : E \to [0, \infty]$, $\mathcal{E}$-mesurable, alors $\int_E g\, d\nu = \int_E f g\, d\mu$.

Preuves.

1. $\nu(\varnothing)=0$. Soit $A_n\in\mathcal{E}, n\geqslant 0$, deux à deux disjoints.

   On pose $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. $\mathbf{1}_A=\sum_{n\geqslant 0}\mathbf{1}_{A_n}$.

   $\nu(A)=\int_E f\,\mathbf{1}_A\,d\mu=\int_E\left(\sum_{n\geqslant 0} f\,\mathbf{1}_{A_n}\right)d\mu=\sum_{n\geqslant 0}\underbrace{\int_E f\,\mathbf{1}_{A_n}\,d\mu}_{=\nu(A_n)}$, donc ν est une mesure positive.

2. Il existe $c_n\in\mathbb{R}_+$et $B_n\in\mathcal{E}, n\geqslant 0$ tels que $g=\sum_{n\geqslant 0} c_n\,\mathbf{1}_{B_n}$ (lemme technique).

   $\int g\ d\nu = \sum_{n\geqslant 0} c_n \int_E \mathbf{1}_{B_n}\ d\nu = \sum_{n\geqslant 0} c_n\ \nu(B_n) = \sum_{n\geqslant 0}\int_E f\ \mathbf{1}_{B_n}\ d\mu = \int_E f\left(\underbrace{\sum c_n\,\mathbf{1}_{\mathrm{Bn}}}_{=g}\right)d\mu$

Lemme. Soient $f, g\colon E\to[0,\infty]$ $\mathcal{E}$-mesurables. On suppose que $\forall A\in\mathcal{E}, \int_A f\,d\mu\leqslant\int_A g\,d\mu$, alors si μ est sigma-finie on a que $f\leqslant g$ μ-presque partout.

Preuve. On suppose d'abord μ finie. On pose pour $a<b$, $A_{a,b}=\{g\leqslant a<b\leqslant f\}$.

$A_{a,b}=g^{-1}([0,a])\cap f^{-1}([b,\infty])\in\mathcal{E}$.

$g\,\mathbf{1}_{A_{a,b}}\leqslant a\,\mathbf{1}_{A_{a,b}}\leqslant b\,\mathbf{1}_{A_{a,b}}\leqslant f\,\mathbf{1}_{A_{a,b}}$. En intégrant :

$$\underbrace{\int_{A_{a,b}} g\,d\mu}_{\geqslant\int_{A_{a,b}} g\,d\mu \text{ par hypothèse}}\leqslant a\,\mu(A_{a,b})\leqslant b\,\mu(A_{a,b})\leqslant\int_{A_{a,b}} f\,d\mu \text{ ; donc :}$$

$a\,\mu(A_{a,b})=b\,\mu(A_{a,b})$, et comme $a\neq b$ et $\mu(A_{a,b})<\infty$, on a $\forall a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$, $\mu(A_{a,b})=0$.

$\{g<f\}=\bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{R}^+\\ a<b}} A_{a,b}\in\mathcal{E}$.

$\mu(\{g<f\})\leqslant\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{R}^+\\ a<b}}\mu(A_{a,b})=0$ donc $f\leqslant g$ μ-preque partout.

Maintenant, dans le cas où μ est sigma-finie : il existe $E_n\in\mathcal{E}, n\in\mathbb{N}$ tels que $\mu(E_n)<\infty$ et $E_n\subset E_{n+1}$ et $E=\bigcup_{n\geqslant 0} E_n$. On applique le cas précédent à $\mu(\cdot\cap E_n)$ ($\int_A f\,d\mu(\cdot\cap E_n)=\int_{A\cap E_n} f\,d\mu$, etc.)

Corollaire. Si $f, g\colon E\to[0,\infty]$ $\mathcal{E}$-mesurables, et si μ est sigma-finie, alors $f\,\mu=g\,\mu\Leftrightarrow f=g$ μ-presque partout.

Preuve. Sens direct : immédiate car $f\,\mu=g\,\mu$ implique $\int_A f\,d\mu=\int_A g\,d\mu$ pour tout $A\in\mathcal{E}$, on rajoute le lemme précédent. Sens indirect : déjà fait.

2013-10-07

Étape 3.

Déf. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f\colon E\to\mathbb{R}$. Elle est dite μ-intégrable si elle est $\mathcal{E}$-mesurable ($\forall a\in\mathbb{R}, \{f\leqslant a\}\in\mathcal{E}$) et si $\int_E |f|\,d\mu<\infty$.

Notation. On note $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{E},\mu)$ l'ensemble des fonctions μ-intégrables.

Soit $f\in\mathcal{L}^1(E,\mathcal{E},\mu)$. On pose $f_+=\max(0,f)$ et $f_-=\max(0,-f)$. On a $f_+\leqslant|f|$ et $f_-\leqslant|f|$ car $|f|=f_++f_-$, et $f=f_+-f_-$. Donc $f_\pm$ est $\mathcal{E}$-mesurable.

$0\leqslant\int_E f_\pm\,d\mu\leqslant\int_E|f|\,d\mu<\infty$. On pose :

$$\int_A f\,d\mu=\int_A f_+\,d\mu-\int_A f_-\,d\mu, A\in\mathcal{E}$$

Propriétés.

1. $\int_A f\,d\mu = \int_E f\,\mathbf{1}_A\,d\mu$
2. $\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,d\mu$
3. $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $c \in \mathbb{R}$, alors $f + c\,g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ (on a un espace vectoriel), et
$$\int_E (f + c\,g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + c\int_E g\,d\mu$$
4. $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ avec $f \leqslant g$, alors $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$ (positivité de l'intégrale)
5. Si $\mu(A) = 0$ alors $\forall f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, $\int_A f\,d\mu = 0$.

Preuves.

1. Trivial, en exercice
2. $\left|\int_E f\,d\mu\right| = \left|\int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu\right| \leqslant \left|\underbrace{\int_E f_+\,d\mu}_{\geqslant 0}\right| + \left|\underbrace{\int_E f_-\,d\mu}_{\geqslant 0}\right| \leqslant \int_E f_+\,d\mu + \int_E f_-\,d\mu = \int_E |f|\,d\mu$
3. $|f + c\,g| \leqslant |f| + |c|\,|g|$ donc $f + c\,g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$.

   Si $c \in \mathbb{R}^+$, $\int_E c\,f\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$ car $(c\,f)_\pm = c\,f_\pm$.

   Si $c \in \mathbb{R}^-$, $(c\,f)_+ = |c| f_-$ et $(c\,f)_- = |c| f_+$

   Linéarité : si $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, $f = f_+ - f_-$ et $g = g_+ - g_-$. On pose $h = f + g$, que l'on écrit $h = h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$, ou encore $h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_-$. Par linéarité de l'intégrale pour des fonctions positives :

   $\int h_+\,d\mu + \int f_-\,d\mu + \int g_-\,d\mu = \int h_-\,d\mu + \int f_+\,d\mu + \int g_+\,d\mu$

   On a maintenant $\int (f + g)\,d\mu = \int h\,d\mu = \int h_+\,d\mu - \int h_-\,d\mu = \int f_+\,d\mu + \int g_+\,d\mu - \int f_-\,d\mu - \int g_-\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$.
4. Si $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_E f\,d\mu \geqslant 0$. On applique sur $g - f$.
5. Trivial à partir du cas positif (en exo).

Intégrale de fonctions complexes.

On se donne $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{E}$-mesurable. On note $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ le module (c'est une fonction continue). $|f|$ est $\mathcal{E}$-mesurable. On note :

$$\mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu) = \left\{ f : E \to \mathbb{C}\ \mathcal{E}\text{-mesurable} : \int_E |f|\,d\mu < \infty \right\}$$

Re, Im : $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sont des applications continues. Si $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, alors Re f et Im f sont des fonctions à valeurs réelles $\mathcal{E}$-mesurables. Par ailleurs, $|\mathrm{Re}\, f| \leqslant \sqrt{(\mathrm{Re}\, f)^2 + (\mathrm{Im}\, f)^2} = |f|$, de même avec Im f, donc $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$. On pose :

$$\int_A f\,d\mu = \int_A \mathrm{Re}(f)\,d\mu + i\int_A \mathrm{Im}(f)\,d\mu$$

On vérifie (en exo) que si $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $c \in \mathbb{C}$, on a :

- $\left|\int_A f\, d\mu\right| \leqslant \int_A |f|\, d\mu$
- $\int_A f\, d\mu = \int_E f\, \mathbf{1}_A\, d\mu$
- $f + c\, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, alors $\int_E (f + c\, g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + c \int_E g\, d\mu$
- Si $\mu(A) = 0$ alors $\int_A f\, d\mu = 0$.

Théorème de convergence dominée (Lebesgue).

On se donne $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

Soit $f_n : E \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions $\mathcal{E}$-mesurables. On suppose que :

1. Il existe une fonction $f : E \to \mathbb{C}$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-presque partout.
2. Hypothèse de domination : il existe $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ μ-presque partout.

Alors :

1. $f, f_n \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu), n \in \mathbb{N}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_E |f - f_n| d\mu = 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu$

Preuve.

$|f_n| \leqslant g \Rightarrow \int_E |f_n|\, d\mu \leqslant \int_E g\, d\mu < \infty$

En passant à la limite en n, on a $|f| \leqslant g$ μ-presque partout. On a donc $\int_E |f|\, d\mu < \infty$, ce qui implique donc le (1).

Comme $\left|\int_E f\, d\mu - \int_E f_n\, d\mu\right| \leqslant \int_E |f - f_n|\, d\mu$, on voit que (2) $\Rightarrow$ (3). Montrons (2) :

On pose $h_n = 2\, g - |f - f_n| \geqslant 0$, h_n est $\mathcal{E}$-mesurable. On a $\lim_{n\to\infty} h_n = 2\, g$ μ-presque partout.

On applique Fatou :

$$\begin{aligned}
\int 2\, g\, d\mu &= \int \lim_{n\to\infty} h_n \\
&= \int l(\mathrm{iminf}_{n\to\infty} h_n)\, d\mu \\
&\overset{\text{Fatou}}{\leqslant} \liminf_{n\to+\infty} \int h_n\, d\mu \\
\liminf_{n\to+\infty} \int h_n\, d\mu &= \mathrm{minf}_{n\to\infty}\left(\int_E 2\, g\, d\mu - \int_E |f - f_n|\, d\mu\right) \\
&= \int_E 2\, g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E |f - f_n|\, d\mu \\
\int_E 2\, g\, d\mu &\leqslant \int_E 2\, g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E |f - f_n|\, d\mu
\end{aligned}$$

Donc $0 \leqslant \mathrm{limsup}_{n\to\infty} \int \ |f - f_n|\, d\mu \leqslant 0$, donc $\lim_{n\to\infty} \int \ |f - f_n|\, d\mu$. $\square$

Théorème (interversion $\sum / \int$ $\mathcal{L}^1$).

Soient $f_n \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu), n \in \mathbb{N}$ telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_E |f_n| \, d\mu < \infty$. Alors :

1. Pour μ-presque-tout $x \in E$, $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$ est absolument convergente et il existe $h \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ telle que $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ μ-presque-partout.

2. $\displaystyle\int_E |h - (f_0 + \cdots + f_n)| \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

3. $\displaystyle\int_E \left(\sum f_n\right) d\mu = \sum_{n \geqslant 0} \int_E f_n \, d\mu$

Preuve. On pose $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n| : E \to [0, \infty]$. Par interversion $\sum / \int$, on a :

$\int_E g \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_E |f_n| \, d\mu \underbrace{<\infty}_{\text{par hypothèse}}$

Par une proposition précédente, $0 \leqslant g < \infty$ μ-presque partout.

On pose $N = g^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{E}$, on a $\mu(N) = 0$ et $\forall x \in E \backslash N, g(x) < \infty$, c'est à dire que $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$ est absolument convergente.

On définit $h: E \to \mathbb{C}$ par $h(x) = 37, 2$ (ou n'importe quel réel) si $x \in N$, et si $x \in E \backslash N$ alors $h(x) = \operatorname{liminf}_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(f_k(x))\right) + i \operatorname{liminf}_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(f_k(x))\right)$. h est $\mathcal{E}$-mesurable et $h = \sum f_n$ μ-presque partout. $|h| \leqslant g \Rightarrow \int |h| \, d\mu < \infty$. Cela montre (1).

Pour le (2), on pose $h_n = \sum_{k=0}^n f_k$, $\mathcal{E}$-meurable avec $|h_n| \leqslant g$ et $h_n \underset{n \to \infty}{\to} h$ μ-presque-partout.

Par convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\int_E |h - h_n| \, d\mu &\xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \\
\int_E h \, d\mu &= \lim_{n \to \infty} \int_E h_n \, d\mu \\
\int_E \left(\sum_{n \geqslant 0} f_n\right) d\mu &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^n \int_E f_k \, d\mu \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \int_E f_k \, d\mu
\end{aligned}$$

Lien avec l'intégrale usuelle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. La formule de la somme de Riemann s'écrit :

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{dt} = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Vérifions la concordance de ce cas particulier avec notre définition.

- Posons :$f_n(x) = f\left(a + \left\lfloor n \frac{x-a}{b-a} \right\rfloor \frac{b-a}{n}\right)$

- Si $n + k \frac{b-a}{n} \leqslant x < (k+1) \frac{b-a}{b} + a$, alors $f_n(x) = f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$.

  Notons $I_{n,k} = \left[a + k \frac{b-a}{n}, (k+1) \frac{b-a}{n} + a\right[$, ils sont disjoints deux à deux et $\bigcup_{k=0}^{n-1} I_{n,k} = [a, b[$.

$\mathbf{1}_{[a,b[}=\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{I_{n,k}}$

- f est bornée sur $[a,b]$: $\exists c\in\mathbb{R}^+ : \forall x\in[a,b], |f(x)|\leqslant c$.

  $|f_n|\leqslant c$

- $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$

- $\int_{[a,b[} c\,\mathrm{d}l=c\,l([a,b[)=c\,(b-a)<\infty$

$$\begin{aligned}\int_{[a,b[} f_n\,\mathrm{d}l &= \int_{[a,b[} f_n\,\mathrm{d}l\\ &= \int_{[a,b[} f_n\,\mathbf{1}_{[a,b[}\,\mathrm{dl}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{[a,b[} f_n\,\mathbf{1}_{I_{n,k}}\,\mathrm{d}l\\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_{I_{n,k}} f_n(x)\,\mathrm{d}l\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)l(I_{n,k})\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\end{aligned}$$

- $\int_{[a,b[} f_n\,\mathrm{d}l=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$

  f_n est mesurable car étagée : $f_n=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\mathbf{1}_{I_{n,k}}$

  donc $\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b[} f_n\,\mathrm{d}l=\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$

  Par convergence dominée sur $([a,b[,\mathcal{B}([a,b[),l)$, $\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b[} f_n\,\mathrm{d}l=\int_{[a,b[} f\,\mathrm{d}l$

  Donc $\int_{[a,b[} f\,\mathrm{d}l=\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$

  Remarque : $\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=0$, donc $\int_{[a,b[} f\,\mathrm{d}l=\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}l=\int_{]a,b[} f\,\mathrm{d}l$.

Théorème. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ continue. Alors elle est mesurable et Lebesgue-intégrable, et :

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}l=\int_{[a,b[} f\,\mathrm{d}l=\int_{]a,b]} f\,\mathrm{d}l=\int_{]a,b[} f\,\mathrm{d}l=\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$$

On retrouve donc notre définition habituelle de l'intégrale.

Remarque : on peut utiliser des notions très variées pour l'élément d'intégration car ça n'est pas important. Par exemple, $\mathrm{d}l$, $l(\mathrm{d}x)$, $\mathrm{d}l(x)$, etc.

Séries et intégrales : c'est la même chose.

Déf. Soit $a_n\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$. On dit que la série de terme général (a_n) converge si $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_n$ existe, et on note alors cette limite $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.

Déf. La série de terme général a_n est absolument convergente si $\sum_{n\geqslant 0}|a_n|<\infty$. Cela implique $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge (car $\mathbb{R}$ est complet).

On peut voir notre suite comme une fonction $a:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

On se rappelle la mesure de comptage : $\#\colon \begin{matrix} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \\ A \mapsto \#A = \operatorname{card} A \end{matrix}$. $(N, \mathcal{P}(N), \#)$ estun espace mesuré.

(a_n) est absolument convergente ssi $\int_{\mathbb{N}} |a| \,\mathrm{d}\# < \infty$: a est $\#$-intégrable.

Dans ce cas, $\sum a_n = \int_{\mathbb{N}} a \,\mathrm{d}\#$.

Exemple. $a_n \in [0, \infty]$. $\lim_{r \to 1} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \; r^n = \sum_{n \geqslant 0} a_n \in [0, \infty]$. Convergence monotone : $a_n r^n \leqslant a_n (r')^n, r \leqslant r'$.

2013-10-08

Mesures images

Déf. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, $(E', \mathcal{E}')$ un espace mesurable, $f\colon E \to E'$ qui est $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$-mesurable, et on pose $\forall B \in \mathcal{E}', \nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$. Alors : $\nu\colon E' \to [0, \infty]$ est une mesure positive : c'est la mesure image de μ par f. Notation : $\nu = \mu \circ f^{-1}$.

Preuve. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, donc $\nu(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

Soient $B_n \in \mathcal{E}', n \in \mathbb{N}$ deux à deux disjoints. $f^{-1}(B_n), n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints.

$\bigcup_{n \geqslant 0} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\big(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\big)$

$\nu\big(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\big) = \mu\big(f^{-1}\big(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\big)\big) = \mu\big(\bigcup_{n \geqslant 0} f^{-1}(B_n)\big) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(f^{-1}(B_n)) = \sum_{n \geqslant 0} \nu(B_n)$

Exercice. La mesure de Lebesgue est invariante par n'importe quelle translation.

Théorème (dit de transfert ou de changement de variable abstrait). $(E, \mathcal{E}, \mu)$, $(E', \mathcal{E}')$, $f\colon E \to E'$ mesurable, on pose $\nu = \mu \circ f^{-1}$. Alors : $h \in \mathcal{L}^1(E', \mathcal{E}', \nu) \Leftrightarrow h \circ f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, et on a :

$$\int_E h(y) \, \nu(\mathrm{d}y) = \int_E h(f(x)) \, \mu(\mathrm{d}x)$$

On a un énoncé analogue pour $h\colon E' \to [0, \infty]$.

Preuve. On commence par le cas $h = \mathbf{1}_B$ avec $B \in \mathcal{E}'$. $h(f(x)) = \mathbf{1}_B(f(x)) = \mathbf{1}_{f^{-1}(B)}(x)$.

$\int_E h(f(x)) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_E \mathbf{1}_{f^{-1}(B)}(x) \, \mu(\mathrm{d}x) = \mu(f^{-1}(B)) = \nu(B) = \int_E \mathbf{1}_B(y) \, \nu(\mathrm{d}y)$

Soit $h\colon E' \to [0, \infty]$ $\mathcal{E}'$-mesurable. D'après le lemme « technique », $\exists c_n \in \mathbb{R}^+$ et $\exists B_n \in \mathcal{E}', n \in \mathbb{N}$ telles que $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \, \mathbf{1}_{B_n}$

$\int_E h \circ f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \int_E \mathbf{1}_{B_n} \circ f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \int_{E'} \mathbf{1}_{B_n} \mathrm{d}\nu = \int_{E'} h \,\mathrm{d}\nu$

Variables intégrales réelles : prendre parties positives et négarives, on se ramène au cas positives.

Vairables complexes : parties réelles et imaginaires et on se ramène au cas réel.

Intégrales à paramètres

Théorème de continuité. Soit (Y, d) un espace métrique, $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, et $f\colon Y \times E \to \mathbb{C}$. On suppose :

1. $\forall y \in Y, f(y, \cdot)\colon E \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{E}$-mesurable

2. Pour μ-presque-tout x, $f(\cdot, x)\colon Y \to \mathbb{C}$ est continue.

3. Il existe $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, $\forall y \in Y, f(y, x) \leqslant g(x)$ μ-presque partout pour x.

Alors : $F(y) = \int_E f(y, x) \, \mu(\mathrm{d}x)$ est bien définie de Y dans $\mathbb{C}$ et elle est continue.

Preuve. $d(y_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

$$\begin{cases} (f(y_n, x)) \leqslant g(x) \\ \lim_{n\to\infty} f(y_n, \cdot) = f(y, \cdot) \end{cases} \mu\text{-presque partout.}$$

Convergence dominée : $F(y_n) = \int_E f(y_n, x)\, \mu(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f(y, x)\, \mu(\mathrm{d}x) = F(y)$

Théorème (dérivation sous l'intégrale). $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. $f: I \times E \to \mathbb{C}$. On suppose :

1. $\forall y \in I, f(y, \cdot) \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$

2. Pour μ-preque tout $x \in E$, $y \mapsto f(y, x)$ est dérivable

   On note sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

3. $\exists g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ telles que $\forall y \in I, \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leqslant g(x)$ μ-presque-partout

Alors : $F(y) = \int_E f(y, x)\, \mu(\mathrm{d}x)$ est bien dévinie et dérivable sur I, de dérivée

$$F'(y) = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, \mu(\mathrm{d}x)$$

Preuve. En exercice.

Exercice. On admet provisoirement que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Calculer $F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux - x^2}\, \mathrm{d}x$

II. Mesures produits. Théorème de Fubini.

Problème. On a deux espaces mesurés : $(E_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$. On veut construire μ sur $E_1 \times E_2$ telle que $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\, \mu_2(B)$. C'est une généralisation de « l'aire ».

Déf. $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$ deux espaces mesurables.

1. On note $\mathcal{P} = \{A \times B; A \in \mathcal{E}_1, B \in \mathcal{E}_2\}$, que l'on appelle ensemble des *pavés* de $E_1 \times E_2$.

   $\mathcal{P}$ est un pi-système (en effet, $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$)

   On pose $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \sigma(\mathcal{P})$. $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ est appellée *tribu produit* de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sur $E_1 \times E_2$.

2. On note $\pi_1: E_1 \times E_2 \to E_1, (x, y) \mapsto x$ et $\pi_2: E_1 \times E_2 \to E_1, (x, y) \mapsto y$ les deux projections canoniques. π_1 est $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$-mesurable et π_2 est $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2)$-mesurable.

   $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ est la plus petite tribu sur $E_1 \times E_2$ rendant mesurable π_1 et π_2.

   $$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \bigcap \left\{ \mathcal{E} \text{ tribu sur } E_1 \times E_2 \text{ telle que } \begin{matrix} \pi_1\ (\mathcal{E}, \mathcal{E}_1)\text{-mes.} \\ \pi_2\ (\mathcal{E}, \mathcal{E}_2)\text{-mes.} \end{matrix} \right\}$$

   $\pi^{-1}(A) = A \times E_2 \in \mathcal{P} \subset \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

Notation. Soit $C \subset E_1 \times E_2$ et $(x, y) \in E_1 \times E_2$. On note $C_x^1 = \{y' \in E_2 : (x, y') \in C\}$ la première section de C en x. De même on note $C_y^2 = \{x' \in E_1 : (x', y) \in C\}$ la seconde section de C en y. Attention : $C_x^1 \subset E_2$ et $C_y^2 \subset E_1$.

Théorème (existence des mesures produit). Soient $(E_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. Soit $C \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. Alors :

1. $\forall (x, y) \in E_1 \times E_2$, on a $C_x^1 \in \mathcal{E}_2$ et $C_y^2 \in \mathcal{E}_1$

2. Si μ_1 et μ_2 sont sigma-finies :

   $x \in E_1 \mapsto \mu_2(C_x^1)$ est $\mathcal{E}_1$-mesurable ;

   $y \in E_2 \mapsto \mu_1(C_y^2)$ est $\mathcal{E}_2$-mesurable.

3. Si μ_1 et μ_2 sont sigma-finies :

$$\int_{E_1} \mu_2(C_x^1)\, \mu_1(\mathrm{d}x) = \int_{E_2} \mu_1(C_y^2)\, \mu_2(\mathrm{d}y)$$

   On note $\mu_1 \otimes \mu_2$ cette dernière quantité.

4. Si μ_1 et μ_2 sont sigma-finies :

   $\mu_1 \otimes \mu_2 : \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \to [0, \infty]$ est l'unique mesure positive sur $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ telle que $\forall A \in \mathcal{E}_1$, $\forall B \in \mathcal{E}_2$, on ait $\mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\, \mu_2(B)$.

Preuve.

- (1) Fixons $x, y \in E_1 \times E_2$. On pose $\mathcal{G} = \{C \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \text{ tq } C_x^1 \in \mathcal{E}_2 \text{ et } C_y^2 \in \mathcal{E}_1\}$

  $A \in \mathcal{E}_1$, $B \in \mathcal{E}_2$. $(A \times B)_x^1 = \{y' \in E_2 : (x, y') \in A \times B\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \varnothing \text{ si } x \notin A \\ B \text{ si } x \in A \end{smallmatrix} \right.$

  $(A \times B)_x^1 \in \mathcal{E}_2$. Pareil, $(A \times B)_y^2 \in \mathcal{E}_1$.

  $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}$

  On vérifie facilement que $\mathcal{G}$ est une tribu. $\mathcal{P} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ et G est une tribu. Or $\sigma(P) = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, donc $\mathcal{G} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, ce qui montre le (1).

- $(2), (3), (4)$ Dans le cas où μ_1 et μ_2 sont finies, preuve de (2).

  On pose $\mathcal{L} = \{C \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 : x \in E_1 \to \mu_2(C_x^1) \text{ est } \mathcal{E}_1\text{-mesurable}\}$

  $\mu_2((A \times B)_x^1) = \mu_2(B)\, \mathbf{1}_A(x)$, $x \mapsto \mu_2((A \times B)_x^1)$ est $\mathcal{E}_1$-mesurable

  Donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$.

  On vérifie que $\mathcal{L}$ est une classe monotone :

  - $E_1 \times E_2 \in \mathcal{P} \subset \mathcal{L}$

  - $C, D \in \mathcal{L}$ tels que $C \subset D$, $C_x^1 \subset D_x^1$; $D_x^1 \backslash C_x^1 = (D \backslash C)_x^1$

    $\mu_2((D \backslash C)_x^1) = \mu_2(D_x^1 \backslash C_x^1) = \mu_2(D_x^1) - \mu_2(C_x^1)$

    $x \mapsto \mu_2((D \backslash C)_x^1)$ est la différence de deux fonctions $\mathcal{E}_1$-mesurables, elles donc $\mathcal{E}_1$-mesurable. Donc $D \backslash C \in \mathcal{L}$.

  - Soient $C_n \in \mathcal{L}, n \in \mathbb{N}$ tels que $C_n \subset C_{n+1}$.

    $(C_n)_x^1 \subset (C_{n+1})_x^1$ et $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right)_x^1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_n)_x^1$

    $\mu_2\left(\left(\bigcup_{n \geqslant 0} C_n\right)_x^1\right) = \mu_2\left(\bigcup_{n \geqslant 0} (C_n)_x^1\right) = \lim_{n \to \infty} \mu_2((C_n)_x^1)$

    $x \in E_1 \mapsto \mu_2\left(\left(\bigcup_{n \geqslant 0} C_n\right)_x^1\right)$ est la limite ponctuelle de fonctions $\mathcal{E}_1$-mesurables, elle est donc elle-même $\mathcal{E}_1$-mesurable.

    Donc $\bigcup_{n \geqslant 0} C_n \in \mathcal{L}$.

  - $\mathcal{L}$ est donc une classe monotone.

$\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, $\mathcal{P}$ est un pi-système et $\mathcal{L}$ est uneclasse monotone. Par le théorème de la classe monotone, $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, donc $\mathcal{L} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

$x \mapsto \mu_2(C_x^1)$ est $\mathcal{E}_1$-mesurable $\forall C \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. On raisonne de même pour $y \mapsto \mu_1(C_y^2)$. Cela montre donc le (2).

- Preuve du (3) : (μ_1 et μ_2 sont toujours finies)

  On pose $\mathcal{L}' = \left\{ C \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 : \int_{E_1} \mu_2(C_x^1)\, \mu_1(\mathrm{d}x) = \int_{E_2} \mu_1(C_y^2)\, \mu_2(\mathrm{d}y) \right\}$

  $\mu_2((A \times B)_x^1) = \mu_2(B)\, \mathbf{1}_A(x)$ et $\mu_1((A \times B)_y^2) = \mu_1(A)\, \mathbf{1}_B(y)$

  $\int_E \mu_2((A \times B)_x^1)\, \mu_1(\mathrm{d}x) = \mu_2(B) \int_E \mathbf{1}_A(x)\, \mu_1(\mathrm{d}x) = \mu_2(B)\, \mu_1(A)$

  $\int_E \mu_1((A \times B)_y^2)\, \mu_2(\mathrm{d}y) = \mu_1(A) \int_E \mathbf{1}_B(y)\, \mu_2(\mathrm{d}y) = \mu_2(B)\, \mu_1(A)$

  Donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}'$

  $\mathcal{L}'$ est une classe monotone (exercice : à un moment il faut utiliser le théorème de convergence monotone).

  Par le théorème des classes monotones, $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}' \subset \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, donc $\mathcal{L}' = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, ce qui montre (3)

- Preuve de (4) : on pose $\mu_1 \otimes \mu_2(C) = \int_{E_1} \mu_2(C_x^1)\, \mu_1(\mathrm{d}x) = \int_{E_2} \mu_1(c_y^2)\, \mu_2(\mathrm{d}y)\ \forall C \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

  $\mu_1 \otimes \mu_2(\varnothing) = 0$

  $C_n \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, n \in \mathbb{N}$ deux à deux disjoints. $\forall x \in E_1, (C_n)_x^1, n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints. On rappelle que $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right)_x^1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_n)_x^1$

  $\mu_1 \otimes \mu_2\left(\bigcup_{n \geqslant 0} (C_n)_x^1\right) = \int_{E_1} \mu_2\left(\bigcup_{n \geqslant 0} (C_n)_x^1\right) \mu_1(\mathrm{d}x) = \int_{E_1} \mu_2\left(\left(\bigcup_{n \geqslant 0} C_n\right)_x^1\right) \mu_1(\mathrm{d}x) = \int_{E_1} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2((C_n)_x^1)\right) \mu_1(\mathrm{d}x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{E_1} \mu_2((C_n)_x^1)\, \mu_1(\mathrm{d}x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1 \otimes \mu_2(C_n)$

  $\mu_1 \otimes \mu_2(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\, \mu_2(E_2) < \infty$

- Si $\nu : \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \to [0, \infty]$ mesure positive telle que $\nu(A \times B) = \nu(A)\, \nu(B)$ pour $A \in \mathcal{E}_1$ et $B \in \mathcal{E}_2$, alors $\forall C \in \mathcal{P}, \nu(C) = \mu_1 \otimes \mu_2(C)$.

  Donc $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$ par unicite du prolongement des mesures. On a montré l'unicité de $\mu_1 \otimes \mu_2$.

- Cas où μ_1 et μ_2 sont sigma-finies : il existe $A_p^1 \in \mathcal{E}_1$, $p \in \mathbb{N}$ partition de E_1, et $A_q^2 \in \mathcal{E}_2$, $q \in \mathbb{N}$ partition de E_2, telles que $\mu(A_p^1) < \infty$ et $\mu(A_q^2) < \infty$.

  On pose $\mu_{1,p} = \mu_1(\cdot \cap A_p^1)$ et $\mu_{2,q} = \mu_2(\cdot \cap A_q^2)$, et on pose $\mu_1 \otimes \mu_2 = \sum_{p,q \in \mathbb{N}} \mu_{1,p} \otimes \mu_{2,q}$

  On vérifie $(1), (2), (3)$.

Lemme. $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$ deux espaces mesurés. $f : E_1 \times E_2 \to [-\infty, \infty]$ ou $\mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$-mesurable. Alors :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in E_1 & f(x, \cdot) : E_2 \to \mathbb{C} \text{ est } \mathcal{E}_2\text{-mesurable} \\ \forall y \in E_2 & f(\cdot, y) : E_1 \to \mathbb{C} \text{ est } \mathcal{E}_1\text{-mesurable} \end{array}$$

Preuve. $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

$(f(x, \cdot))^{-1}(B) = \{y \in E_2 : f(x, y) \in B\} = \{y \in E_2 : (x, y) \in f^{-1}(B)\} = (f^{-1}(B))_x^1 \in \mathcal{E}_2$ par le théorème précédent.

Théorème(s) de Fubini. $(E_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. On suppose que μ_1 et μ_2 sont sigma-finies. $f\colon E_1 \times E_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$-mesurable.

1. **Fubini positif.** On suppose que $f\colon E_1 \times E_2 \to [0, \infty]$ est une fonction $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$-mesurable. Alors :

   a. $y \in E_2 \mapsto \int_{E_1} f(x, y)\, \mu_1(\mathrm{d}x)$ est $\mathcal{E}_2$-mesurable

      $x \in E_1 \mapsto \int_{E_2} f(x, y)\, \mu_2(\mathrm{d}y)$ est $\mathcal{E}_1$-mesurable

   b. On a la formule $(*)$:

      $$\int_{E_1 \times E_2} f\ \mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y)\ \mu_2(\mathrm{d}y) \right) \mu_1(\mathrm{d}x) = \int_{E_2} \left(\int_{E_2} f(x, y)\, \mu_1(\mathrm{d}x) \right) \mu_2(\mathrm{d}y)$$

2. On suppose que $f\colon E_1 \times E_2 \to \mathbb{C}$ et que $\int_{E_1 \times E_2} |f|\, \mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2 < \infty$

   Alors

   a. Pour μ_2-presque-tout $y \in E_2$, $f(\cdot, y)$ est μ_1-intégrable

      Pour μ_1-presque-tout $x \in E_1$, $f(x, \cdot)$ est μ_2-intégrable

   b. $y \in E_2 \mapsto \int_{E_1} f(x, y) \mu_1(\mathrm{d}x)$ est définie μ_2-presque-partout et est μ_2-intégrable.

      Même énoncé sur l'autre coordonnée

   c. On a la formule $(*)$.

Preuve. (1) Si $f = \mathbf{1}_C$, $C \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, c'est le théorème d'existence des mesures produit.

Lemme technique : $\exists a_n \in \mathbb{R}_+, \exists C_n \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, n \in \mathbb{N}$ tels que $f = \sum_{n \geqslant 0} a_n \mathbf{1}_{C_n}$.

$y \in E_2 \mapsto \mu_1((C_n)_y^2)$ est $\mathcal{E}_1$-mesurable.

$\int_{E_1} f(x, y)\, \mu_1(\mathrm{d}x) = \sum a_n \mu_1((C_n)_y^2)$

Donc $y \mapsto \int_{E_1} f(x, y)\ \mu_1(\mathrm{d}x)$ est une série de fonctions $\mathcal{E}_2$-mesurables, elle est donc $\mathcal{E}_2$-mesurable.

$\int_{E_1 \times E_2} f\ \mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2 = \sum_{n \geqslant 0} a_n\ \mu_1 \otimes \mu_2(C_n) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \int_{E_1} \mu_2((C_n)_x^1)\ \mu_1(\mathrm{d}x) = \int_{E_1} \left(\sum_{n \geqslant 0} a_n \mu_2((C_n)_x^1) \right) \mu_1(\mathrm{d}x) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y) \mu_2(\mathrm{d}y) \right) \mu_1(\mathrm{d}x)$.

Même raisonnement sur l'autre coordonnée.

(2) On suppose $f\colon E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$-mesurable, tele que $\int_{E_1 \times E_2} |f|\, \mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2 < \infty$, on a donc $\int_{E_1 \times E_2} f_\pm\, \mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2 < \infty$

Par Fubini positif, $\int_{E_1} \left(\int_{E_2} f_\pm(x, y) \mu_2(\mathrm{d}y) \right) \mu_1(\mathrm{d}x) < \infty$

Donc pour μ_1-presque tout $x \in E_1$, $x \mapsto \int_{E_2} f_\pm(x, y) \mu_2(\mathrm{d}y)$ est bien définie et μ_1-intégrable. Cela implique 2.a, 2.b et 2.c. $\square$

2013-10-09

Lemme. Soit$(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est sigma-finie. On note $l: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ la mesure de Lebesgue. Soit $f: E \to [0, \infty]$, $\mathcal{E}$-mesurable. Alors $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_0^\infty \mu(\{f > a\}) \,\mathrm{d}l(a)$.

Preuve. $\int_E f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_E \left(\int_0^{f(x)} l(\mathrm{d}a)\right) \mu(\mathrm{d}x) = \int_E \left(\int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{[0, f(x)]}\, l(\mathrm{d}a)\right) \mu(\mathrm{d}x) = \int_{E \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{\{(x, y) \in E \times \mathbb{R}^+ : a < f(x)\}}\, \mu(\mathrm{d}x) \otimes l(\mathrm{d}a) = \int_{\mathbb{R}^+} l(\mathrm{d}a)\, \mu(\{f > a\})$.

(idée de preuve à retenir).

$D = \{(x, a) \in E \times \mathbb{R}^+ : a < f(x)\}$. Il faut prouver que $D \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$, c'est le seul point à vérifier.

On pose $A_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}([k\, 2^{-n}, \infty]) \times [0, k\, 2^{-n}[\in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. $A_n \subset D$.

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

Soient (x, a) tel que $a < f(x)$, alors $\exists k, n$ tq $a < k\, 2^{-n} \leqslant f(x)$, donc $(x, a) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, donc $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

Produit fini d'espaces mesurés

Soient $(E_i, \mathcal{E}_i, \mu_i), i \in \{1, 2, 3\}$ trois espaces mesurés avec μ_i sigma-finie.

On identifie $E_1 \times (E_2 \times E_3)$ avec $(E_1 \times E_2) \times E_3$.

On construit $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3 = (\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \otimes \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1 \otimes (\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3)$.

On définit $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 = (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$.

Par récurrence, si on a n espaces mesurés sigma-finis, on définit $\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n = (\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_{n-1}) \otimes \mathcal{E}_n$ et $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n = (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n$.

Notation. Si $(E, \mathcal{E}, \mu) = (E_i, \mathcal{E}_i, \mu_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$, on note $E^n = E_1 \times \cdots \times E_n$, $\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n = \mathcal{E}^{\otimes n}$ et $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n = \mu^{\otimes n}$.

Déf. Soient $(E_i, \mathcal{E}_i, \mu_i), i \in \{1, \ldots, n\}$ des espaces mesurés sigma finis.

1. On pose $\mathcal{P} = \{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n; A_i \in \mathcal{E}_i, i \in \{1, \ldots, n\}\}$. C'est le pi-système des pavés. On a $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n$.

2. Si on note $\pi_i: E_1 \times \cdots \times E_n \to E_i, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_n$, alors π_i est $(\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_i)$-mesurable. $\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n$ est la plus petite tribu rendant mesurables les projections canoniques.

3. $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ est l'unique mesure telle que $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_1(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n)$ pour tous $A_i \in \mathcal{E}_i, i \in \{1, \ldots, n\}$.

II.2. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Topologie engendrée

Soit E un ensemble muni de topologies $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(E), i \in I$. Alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est une topologie sur E (la vérification est triviale).

On peut donc définir la topologie engendrée.

Déf. Soit $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(E)$ une classe d'ensembles (quelconque). On note $\tau(\mathcal{R}) = \bigcap_{\mathcal{T} \text{ topologie tq } \mathcal{R} \subset \mathcal{T}} \mathcal{T}$. $\tau(\mathcal{R})$ est une topologie, c'est la topologie *engendrée* par $\mathcal{R}$.

Soit (E, d) un espace métrique. On note $B_d(x, r) = \{y \in E: d(x, y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r.

Si on note $\mathcal{R} = \{B_d(x, r)\,; x \in E, r \in \mathbb{R}^+\}$, on a que $\tau(\mathcal{R}) = \mathcal{T}_d$ (la topologie engendrée par la métrique est la topologie engendrée par les boules ouvertes).

Attention : $\mathcal{B}_{\mathcal{T}_d}(E)$ (la tribu des boréliens en prenant $\mathcal{T}_d$ comme topologie) en général n'est pas engendrée par $\mathcal{R}$. Mais on peut y arriver dans un espace séparable :

Lemme. Soit (E, d) un espace métrique séparable, c'est-à-dire qu'il existe une suite $x_n \in E, n \in \mathbb{N}$ dense (dont tout point de E est limite extraite). On pose :

$$\mathcal{R} = \{B_d(x_n, q)\,; n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}\}$$

$\mathcal{R}$ est dénombrable. Si U est un ouvert de E (pour la topologie $\mathcal{T}_d$), alors il existe $B_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$ telle que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Cela implique que $\tau(\mathcal{R}) = \mathcal{T}_d$ et que $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{R})$.

Preuve. U ouvert $\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r_x > 0$ tel que $x \in B_d(x, r_x) \subset U$.

Il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ et $q(x) \in \mathbb{Q}_+$ tel que $2\,q(x) < r_x$ et $d(x, x_{n(x)}) < q(x)$.

Donc $x \in B_d(x_{n(x)}, q(x))$.

Soit $y \in B_d(x_{n(x)}, q(x))$, alors $d(x, y) \leqslant d(x, x_{n(x)}) + d(x_{n(x)}, y) \leqslant 2\,q(x) < r(x)$, donc $x \in B_d(x_{n(x)}, q(x)) \subset B(x, r_x)$. On a donc $U = \bigcup_{x \in U} B(x_{n(x)}, q(x))$.

Comme $\mathcal{R}$ est dénombrable, il existe $B_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$ tel que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(E)$, $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{B}(E)$.

$\mathcal{T}_d \subset \sigma(\mathcal{R})$, donc $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{T}_d) \subset \sigma(\mathcal{R})$, on a donc $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(E)$.

Déf. $(E, \mathcal{T})$ et $(E', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. La *topologie produit* sur $E \times E'$ est la topologie engndrée par $\{U \times U'; U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$.

Prop. (E, d) et (E', d') deux espaces métriques séparables, dont les tribus boréliennes sont notées $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B}(E')$. On munit $E \times E'$ de la topologie produit, et on note la tribu borélienne associée $\mathcal{B}(E \times E')$. Alors :

1. La topologie produit est une topologie métrique séparable (elle correspond à une certaine distance sur l'espace produit).

2. $\mathcal{B}(E \times E') = \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E')$.

Preuve.

1. Sur $E \times E'$, on définit une distance $D((x, x'), (y, y')) = \max(d(x, y), d'(x', y'))$. On vérifie que D est une distance.

   Montrons qu'elle correspond à la topologie produit :

   $B_D((x, x'), r) = B_d(x, r) \times B_{d'}(x', r)$.

   On a $x_p \in E, p \in \mathbb{N}$ dense dans E et $x'_q \in E', q \in \mathbb{N}$ dense dans E'. Alors $(x_p, y_q), p, q \in \mathbb{N}$ est dense dans $E \times E'$ pour D.

   Posons $\mathcal{R} = \{B_d(x_p, r) \times B_{d'}(x'_q, r)\,;\, p, q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}_+\}$. $\mathcal{R}$ est inclus dans la topologie produit.

   Soit V un ouvert de $\mathcal{T}_D$. Par la proposition précédente, il existe $B_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$ telle que $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. On a donc que $\mathcal{T}_D$ est inclus dans la topologie produit.

   On montre aussi que $\forall U \in \mathcal{T}$, $\forall U' \in \mathcal{T}'$, $U \times U' \in \mathcal{T}_D$ (laissé en exo), donc $\mathcal{T}_D$ est la topologie produit.

2. Par ailleurs, $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E')$. Donc $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(E \times E') \subset \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E')$. Montrons l'inclusion inverse :

   On pose $\mathcal{E} = \{A \times E' \,;\, A \in \mathcal{B}(E)\}$. $\mathcal{E}$ est une tribu sur $E \times E'$. Elle est engendrée par $\{U \times E' ; U$ ouvert de $E\}$, or $U \times E'$ est un ouvert produit, donc $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}(E \times E')$.

   On pose $\mathcal{E}' = \{E \times B ; B \in \mathcal{B}(E)\}$. De même, $\mathcal{E}' \subset \mathcal{B}(E \times E')$.

   $\forall A \in \mathcal{B}(E), \forall B \in \mathcal{B}(E')$, on a $A \times E'$ et $E \times B \in \mathcal{B}(E \times E')$.

   Donc $A \times B = (A \times E') \cap (E \times B) \in \mathcal{B}(E \times E')$. Donc $\mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E') \subset \mathcal{B}(E \times E')$.

Corollaire. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(R^m)$.

Cubes diadiques. On fixe $p \in \mathbb{N}$, on note ;

$$\mathcal{C}_p = \left\{ \prod_{i=1}^n [k_i\, 2^{-p}, (k_i + 1)\, 2^{-p}[\,; k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\mathcal{C}_p$ est l'ensemble des cubes diadiques de côté 2^{-p} de $\mathbb{R}^n$. On pose :

$$\mathcal{C} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_p$$

Lemme. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\delta > 0$, il existe un entier $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-p_0} < \delta$ et tel que U soit une union dénombrable de cubes diadiques de $\bigcup_{p \geqslant p_0} \mathcal{C}_p$, deux-à-deux disjoints, et dont l'adhérence est contenue dans U.

Preuve. Si $q > p$, alors tout cube de $\mathcal{C}_p$ est union finie de cubes de $\mathcal{C}_q$ deux à deux disjoints.

Si $C \in \mathcal{C}_q$ et $C' \in \mathcal{C}_q$, $q > p$, alors ou bien $C \cap C' = \varnothing$, ou bien $C \subset C'$.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Notons $C(x, p) = \prod_{i=1}^n [2^{-p} \lfloor 2^p\, x_i \rfloor, 2^{-p} (\lfloor 2^p x_i \rfloor + 1)[\in \mathcal{C}$.

$x \in U$, on note $p(x) = \inf \{p \in \mathbb{N} : \overline{C(x, p)} \subset U\}$. $U = \bigcup_{x \in U} C(x, p(x))$.

II.3. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Déf. On rappelle que $l : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On pose $l_n = l^{\otimes n}$: c'est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$).

Corollaire. $l_{m+n} = l_m \otimes l_n$.

$$(*) : \forall a_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant b_n, l_n([a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

et l_n est l'unique mesure vérifiant $(*)$.

Théorème. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, on note $x + A = \{x + y ; y \in A\}$. Alors :

1. $x + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

2. La mesure de Lebesgue est invariante par translation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), l_n(x + A) = l_n(A)$$

3. Soit $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mesure positive telle que :

   a. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu(x + A) = \mu(A)$

b. $\exists$ un ouvert O borné tel que $0 < \mu(O) < \infty$

Alors $\mu = c\, l_n$, avec $c \in \mathbb{R}_+^*$.

Preuve. $T_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, y \mapsto x + y$ est une application continue bijective, et $T_x^{-1} = T_{-x}$.

$x + A = T_{-x}^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

On pose $\nu = l_n \circ T_{-x}^{-1}$, on a $\nu(A) = l_n(x + A)$

ν est une mesure positive. $\nu([a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[) = l_n([a_1 + x_1, b_1 + x_1[\times \cdots \times [a_n + x_n, b_n + x_n[) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ donc $\nu = l_n$. Cela montre les poitns (1) et (2).

On pose $C = [0, 1[^n$ et $c = \mu(C)$. Soit $\vec{k} \in \mathbb{Z}^n$. $C_{\vec{k}, p} = 2^{-p}\vec{k} + [0, 2^{-p}[^n \in \mathcal{C}_p$

Donc $\mu\big(C_{\vec{k}, p}\big) = \mu\big(C_{\vec{0}, p}\big) = \mu([0, 2^{-p}[^n)$.

$C = \bigcup_{0 \leqslant k_i < 2^p} C_{k, p}$, donc $\mu(C) = c = (2^p)^n\, \mu([0, 2^{-p}[^n)$

$\mu([0, 2^{-p}[^n) = 2^{-np}\, c$.

O est réunion dénombrable de cubes de côtés $<2^{-p}$ deux à deux disjoints. Comme $\mu(O) \in]0, \infty[$, on a $\infty > c > 0$.

On se donne $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}_+$. On pose $R = [0, r_1[\times \cdots \times [0, r_n[$.

On note $R_p = \prod_{i=1}^n [0, 2^{-p}\lfloor 2^p r_i \rfloor[= \bigcup_{\substack{k_i < 2^{-p}\lfloor 2^p r_i \rfloor \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} C_{\vec{k}, 2^{-p}}$

$\mu(R_p) = 2^{-np}\, c \prod_{i=1}^n \lfloor 2^p r_i \rfloor = c \prod_{i=1}^n 2^{-p} \lfloor 2^p r_i \rfloor$

$R_p \subset R_{p+1}$ et $\bigcup R_p = R$. $\mu(R) = \lim_{p \to \infty} \mu(R_p) = c\, r_1 \cdots r_n$. Par translation, $\mu([a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[) = c\,(b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$, donc $\frac{1}{c}\mu = l_n$.

2013-10-14

II.4. Outils de calcul intégral

II.4.a. Changement de variable linéaire

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base caononique $(e_1, \ldots, e_n)$.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(R) : \det M \neq 0\}$

Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors M et M^{-1} sont des bijections continues de $\mathbb{R}^n$.

Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $M(A) = (M^{-1})^{-1}(A)$, donc $M(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $\mu(A) = l_n(M(A)) = l_n((M^{-1})^{-1}(A))$. μ est une mesure positive, c'est la mesure image de l_n par M^{-1}.

Théorème. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), l_n(M(A)) = |\det M|\, l_n(A) \qquad (*)$$

On a donc : $\forall f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $|\det M| \int_{\mathbb{R}^n} f(Mx) l_n(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) l_n(\mathrm{d}x)$

On a un énoncé analogue pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), l_n)$

Preuve. $(*)$ implique le reste du théorème (laissé en exo).

Il suffit de montrer $(*)$: on utilise le lemme suivant :

Lemme. Toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme un produit fini de matrices des types suivants :

a) matrices de permutation : $\gamma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ une permutation, $M e_i = e_{\gamma(i)}$

b) pour $\lambda \in \mathbb{R}, M e_1 = \lambda\, e_1$ et $\forall j \in \{2, \ldots, n\}, M e_j = e_j$

c) $M e_1 = e_1 + e_2$ et $M e_j = e_j, j \in \{2, \ldots, n\}$

Preuve. En exercice.

On note $\mu(A) = l_n(M(A))$. $x \in \mathbb{R}^n$, $M(x + A) = M x + M(A)$.

$\mu(x + A) = l_n(M x + M(A)) = l_n(M(A)) = \mu(A)$, donc μ est invariante par les translations.

Soit $C =]0, 1[^n$, alors $M(C)$ est un ouvert borné, non vide. $\mu(C) = l_n(M(C)) \in]0, \infty[$.

Donc il existe $c(M) = l_n(M(C)) \in]0, \infty[$ telle que $\mu(\cdot) = c(M)\, l_n(\cdot) = l_n(M\, \cdot\,)$.

On a la relation : $c(M)\, c(M') = c(M\, M')$. Il suffit de vérifier que $c(M) = |\det M|$ pour des matrices du type a), b) et c) (en exercice). $\square$

Conséquences.

1. Si $F \subset \mathbb{R}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension $m < n$, alors $l_n(F) = 0$.

   Preuve. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. $l_n(x + F) = l_n(F)$.

   $\exists M \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $M(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\} = G$.

   $|\det M| = 1$ donc $l_n(M\,(x + F)) = l_n(G)$.

   $l_n(G) = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}} l_{n-1}(\mathrm{d}y) \otimes l_1(\mathrm{d}x)\, \mathbf{1}_G((x, y)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} l_{n-1}(\mathrm{d}y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_G((y, x))\, l_1(\mathrm{d}x)}_{\leqslant l_1(\{0\}) = 0}$

2. Applications linéaires qui préservent la mesure de Lebesgue : $\{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : |\det M| = 1\}$

II.4.b. Changement de variable géométrique

Si $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ et $\forall t \in [a, b], \varphi'(t) \neq 0$, alors φ est bijective (strictement monotone), et φ^{-1} est aussi $\mathcal{C}^1$.

$$\forall f : [c, d] \to \mathbb{R}, \int_a^b f(\varphi(t))\, |\varphi'(t)|\, l(\mathrm{d}t) = \int_c^d f(y)\, l(\mathrm{d}y), \text{ où } [c, d] = \varphi([a, b])$$

$G(x) = \int_a^x f(\varphi(t)) \varphi'(t) l(\mathrm{d}t)$ et $F(x) = \int_c^{\varphi(x)} f(y) l(\mathrm{d}y)$. $G'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x) = F'(x)$, les fonctions coincident.

On va essayer de généraliser cette formule en dimension n pour l_n.

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.

On note $\mathcal{B}(U) = \{B \cap U, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\} = \sigma(\mathcal{T}_u)$ où $\mathcal{T}_u = \{O \cap U, O \in \mathcal{T}\}$, de même pour $\mathcal{B}(V)$.

$\mathcal{B}(U)$ et $\mathcal{B}(V)$ sont les boréliens de U et V.

On se donne $\varphi\colon U \to V$ continue bijective telle que $\varphi^{-1} : V \to U$ est continue (c'est un *homéomorphisme* de U sur V).

Si $A \in \mathcal{B}(U)$, alors $\varphi(A) \in \mathcal{B}(V)$ car $\varphi(A) = (\varphi^{-1})^{-1}(A)$.

$\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) & \to & [0, \infty] \\ A & \mapsto & l_n(\varphi(A)) \end{array} \right.$ est la mesure image de $l_n(\cdot \cap V)$ par φ^{-1}.

On suppose que φ est $\mathcal{C}^1$-différentiable, c'est à dire que les dérivées partielles existent et sont continues sur U. On note $D_x\varphi = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$.

On note $\mathrm{Jac}_\varphi(x) = \det(D_x\varphi)$: c'est le Jacobien de φ en x.

Si φ est $\mathcal{C}^1$, alors $\left\{ \begin{array}{lll} U & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Jac}_\varphi(x) \end{array} \right.$ est continue car $x \mapsto D_x\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue.

Théorème d'inversion globale. U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\varphi: U \rightarrow V$ un homéomorphisme $\mathcal{C}^1$. On suppose $\forall x \in U$, $\mathrm{Jac}_\varphi(x) \neq 0$, alors $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ est aussi $\mathcal{C}^1$. On dit alors que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Théorème de changement de variables géométrique. Soit $\varphi: U \rightarrow V$ un homéomorphisme $\mathcal{C}^1$ tel que $\forall x, \mathrm{Jac}_\varphi(x) \neq 0$. Donc $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ est également $\mathcal{C}^1$ (φ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme). Alors :

$$\forall f: V \rightarrow [0, \infty], \int_U f(\varphi(x)) \, |\mathrm{Jac}_\varphi(x)| \, l_n(\mathrm{d}x) = \int_V f \, \mathrm{d}l_n$$

On a un énoncé analogue pour $f \in \mathcal{L}^1(V, \mathcal{B}(V), l_n)$.

On peut noter : $l_n(\varphi(\cdot)) = |\mathrm{Jac}_\varphi(\cdot)| \, l_n(\cdot \cap V)$

Heuristique. $\varphi(x) = \underbrace{\varphi(x_0) + (D_{x_0}\varphi)(x - x_0)}_{= L_{x_0}(x - x_0)} + o(\|x - x_0\|)$, où L_{x_0} application affine.

$\varphi(B(x_0, r)) \simeq \varphi(x_0) + D_{x_0}\varphi(B(x_0, r))$

$l_n(\varphi(B(x_0, r))) \simeq \underbrace{|\det D_{x_0}(\varphi)|}_{|\mathrm{Jac}_{\varphi(x_0)}|} \, l_n(B(x_0, r))$

II.4.c. Changement en coordonnées polaires

On se place ici dans $\mathbb{R}^2$. $U =]0, 2\pi[\times]0, \infty[$, et $\varphi: (\theta, r) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0, x_1 \geqslant 0\}$

φ est un homomorphisme $\mathcal{C}^1$ de U sur V.

$\varphi(\theta, r) = (\varphi_1(\theta, r), \varphi_2(\theta, r))$

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = -r\sin\theta$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \cos\theta$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = r\sin\theta$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \sin\theta$. $\mathrm{Jac}_\varphi(\theta, r) = r \neq 0$, d'où :

$$\forall f: V \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ avec } f \text{ mesurable}, \int_{]0, 2\pi[\times]0, \infty[} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \, r \, l_2(\mathrm{d}j \, \mathrm{d}r) = \int_V f \, \mathrm{d}l_2$$

$([0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+) \backslash U = \underbrace{(\{0\} \times \mathbb{R}^+) \cup (\{2\pi\} \times \mathbb{R}^+) \cup ([0, 2\pi] \times \{0\})}_{l_2 \text{ négligable}}$

Théorème. $\forall f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$ mesurable,

$$\int_{[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \, r \, l_2(\mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r) = \int_{\mathbb{R}^2} f \, \mathrm{d}l_2$$

Énoncé analogue pour f l_2-intégrable.

Exemple. On calcule $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} l_1(\mathrm{d}x)$.

On pose $g(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue donc mesurable. Par Fubini :

$\int_{\mathbb{R}^2} g\,\mathrm{d}l_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} l_1(\mathrm{d}x)\, e^{-x^2}\right)\left(\int_{\mathbb{R}} l_1(\mathrm{d}y) e^{-y^2}\right) = I^2.$

On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On a alors $r^2 = x^2 + y^2$.

$\int_{\mathbb{R}^2} g\,\mathrm{d}l_2 = \int_{[0,2\pi]\times\mathbb{R}^+} e^{-r^2}\, r\, l_2(\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta) = 2\pi \underbrace{\int_{\mathbb{R}^+} e^{-r^2}\, r\, l_1(\mathrm{d}r)}_{1/2}$, on a donc $I = \sqrt{\pi}$.

II.4.d. Changement de variables radial

$B_n = \bar{B}(0,1)$, $S_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

$\mathcal{T}_{S_n} = \{S_n \cap U, U$ ouvert de $\mathbb{R}^n\}$, $\mathcal{B}(S_n) = \sigma(\mathcal{T}_{S_n}) = \{S_n \cap B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$

Soit $A \in \mathcal{B}(S_n)$. On note $C(A) = \{r\,x ; x \in A, r \in]0,1]\}$.

Soit $\mathrm{Proj}: \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n\backslash\{0\} & \to & S_n \\ x & \mapsto & \frac{1}{\|x\|}\,x \end{array}\right.$, c'est une application continue. $\mathrm{Proj}^{-1}(A) \cap B_n = C(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Déf. On définit $\sigma_n : \mathcal{B}(S_n) \to \mathbb{R}^+$ en posant $\sigma_n(A) = n\, l_n(C(A))$. $\sigma(n)$ est la mesure image par Proj de la restriction de l_n à B_n. σ_n est appellée *mesure de surface* de la sphère.

Explication du facteur n. $s_n = \sigma_n(S_n)$. On veut que $l_n(B(0, 1+\varepsilon) \setminus B(0,1)) \simeq \varepsilon\, s_n + o(\varepsilon)$. $(1+\varepsilon)^n l_n(B_n) - l_n(B_n) \simeq n\,\varepsilon\, l_n(B_n) + o(e)$.

Théorème de changement de variables radial. Soit $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ mesurable.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}l_n = \int_{\mathbb{R}^+\times \mathrm{Sn}} f(r,x)\, n\, r^{n-1}\, l_1(\mathrm{d}r)\, \sigma_n(\mathrm{d}x)$$

Avec un énoncé analogue pour f l_1-intégrable.

Preuve. On pose $\mu(\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x) = r^{n-1}\, l_1(\mathrm{d}r) \otimes \sigma_n(\mathrm{d}x)$, c'est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*) \otimes \mathcal{B}(S_n)$.

$\varphi: \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times S_n & \to & \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \\ (r,x) & \mapsto & r\,x \end{array}\right.$; $\varphi^{-1}(y) = (\|y\|, \mathrm{Proj}(y))$.

Soit ν la mesure image par φ^{-1} de l_n : $\nu(A) = l_n(\varphi(A))$, ν est bien une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^\times) \otimes \mathcal{B}(S_n)$. Le théorème signifie que $\nu = \mu$.

On va utiliser le pi-système $\mathcal{P} = \{]0,a] \times A ; a \in \mathbb{R}_+^*, A \in \mathcal{B}(S_n)\} \cup \{\mathbb{R}_+^* \times S_n\}$

Il suffit de démontrer que μ et ν coincident sur $\mathcal{P}$.

$\nu(]0,a] \times A) = l_n(\varphi(]0,a] \times A)) = l_n(\{r\,x ; r \in]0,a], x \in A\}) = l_n(a\, C(A)) = a^n l_n(C(A)) = \frac{1}{n} a^n \sigma_n(A)$

et $\mu(]0,\ a] \times A) = \sigma_n(A) \int_{]0,a]} r^{n-1}\ l_1(\mathrm{d}r) = \int_{\mathbb{R}^n} l_n(\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n)\ \mathbf{1}_{\{x_1^2+\cdots+x_n^2 \leqslant 1\}} = \int_{\mathbb{R}} l_1(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} l_{n-1}(\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1})\, \mathbf{1}_{\{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 \leqslant 1-x^2\}} = \frac{1}{n} a^n\, \sigma_n(A)$ □

Corollaire. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. $\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\, l_n(\mathrm{d}x) = \sigma_n(S_n) \int_{\mathbb{R}_+} f(r)\, r^{n-1}\, l_1(\mathrm{d}r)$.

Volume des boules et des sphères de $\mathbb{R}^n$. $l_n(B(0,r)) = l_n(B(x,r)) = r^n\, l_n(B(0,1))$

On pose $b_n = l_n(B(0,1))$.

$$\begin{array}{rcl} b_n & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} l_n(\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n)\, \mathbf{1}_{\{x_1^2+\cdots+x_n^2 \leqslant 1\}} \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} l_1(\mathrm{d}x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} l_{n-1}(\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1})\, \mathbf{1}_{\{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 \leqslant 1-x^2\}}}_{=l_{n-1}\left(B\left(0,\sqrt{1-x^2}\right)\right) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} b_{n-1}} \\ & = & \displaystyle b_{n-1} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}x \end{array}$$

On trouve : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $b_{2p} = \frac{\pi^p}{p!}$ et $b_{2p-1} = \frac{\pi^{p-1}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}$, ce qui s'écrit aussi :

$$b_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad \text{avec} \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

$s_n = \sigma(S_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

Exercice.

1. Pour quels $\alpha \geqslant 0$ a-t-on $\int_{B(0,1)} \|x\|^{-\alpha} l_n(\mathrm{d}x) < \infty$?

2. Pour qules $\alpha \geqslant 0$ a-t-on $\sum_{p,q \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(1+p^2+q^2)^\alpha} < \infty$?

2013-10-15

II.5. Régularité des mesures

(E, d) un espace métrique dont les boréliens sont notés $\mathcal{B}(E)$.

Déf. *séparable* : il existe une suite dense ou un sous-ensemble dénombrable dense.

Soit $A \subset E$, $\forall x \in E$ on note $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

On vérifie que $\forall x, x' \in E, |d(x, A) - d(x', A)| \leqslant d(x, x')$

$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$ (adhérence de A).

Déf. Soit $\mu: \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ une mesure positive.

1. Elle est dite *régulière extérieurement pour les ouverts* si

$$\forall A \in \mathcal{B}(E), \mu(A) = \inf \{\mu(U) ; A \subset U, \ U \text{ ouvert}\}$$

2. μ est dite *régulière intérieurement pour les fermés* si

$$\forall A \in \mathcal{B}(E), \mu(A) = \sup \{\mu(F) ; F \subset A, \ F \text{ fermé}\}$$

3. μ est dite *régulière intérieurement pour les compacts* si

$$\forall A \in \mathcal{B}(E), \mu(A) = \sup \{\mu(K) ; K \subset A, \ K \text{ compact}\}$$

Théorème. Si (E, d) est un espace métrique et $\mu: E \to [0, \infty[$ une mesure positive finie, alors μ est régulière extérieurement pour les ouverts et intérieurement pour les fermés.

Preuve. On pose $\mathcal{E} = \left\{ A \in \mathcal{B}(E) : \begin{matrix} \mu(A) = \inf \{\mu(U) ; A \subset U, \ U \text{ ouvert}\} \\ \mu(A) = \sup \{\mu(F) ; F \subset A, \ F \text{ fermé}\} \end{matrix} \right\}$

1. Montrons que $\mathcal{E}$ contient les ouverts :

   Pour un ouvert U, $\mu(U) = \inf \{\mu(V) ; V \supset U, V \text{ ouvert}\}$ est évident.

   On pose $F_n = \{x \in E : d(x, E \backslash U) \geqslant 2^{-n}\} = d(\cdot, E \backslash U)^{-1}([2^{-n}, \infty[)$

   F_n est fermé, $F_n \subset F_{n+1} \subset U$. Donc $\bigcup_{n \geqslant 0} F_n = U$.

   On a donc $\mu(U) = \lim_{n \to \infty} \mu(F_n)$, donc $\mu(U) = \sup = \{\mu(F) ; F \subset U, \ F \text{ fermé}\}$

On a montré que $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ contient les ouverts).

2. Il suffit de montrer que $\mathcal{E}$ est une tribu, car alors, on aura $\sigma(\mathcal{T}_d) \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{T}_d)$.

   - $E \subset \mathcal{E}$
   - Comme μ est finie, $\mathcal{E}$ est stable par passage au complémentaire
   - Soit $A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$, montrons que $\bigcup_{n \geqslant 0} A_n \in \mathcal{E}$

     $\exists F_n \subset A_n \subset U_n, n \in \mathbb{N}$, F_n fermé, U_n ouvert, tels que

     $$\mu(A_n \backslash F_n) < 2^{-n-1} \varepsilon$$

     $$\mu(U_n \backslash A_n) < 2^{-n-1} \varepsilon$$

     Pour simplifier les notations, on pose $A = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n$ et $U = \bigcup_{n \geqslant 0} U_n$. Clairement, $A \subset U$, U ouvert et $U \backslash A \subset \bigcup_{n \geqslant 0} U_n \backslash A_n$.

     $\mu(U \backslash A) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \mu(U_n \backslash A_n) \leqslant \varepsilon$

     Comme $\mu(A) = \lim\uparrow_{N \to +\infty} \bigcup_{0 \leqslant n \leqslant N} A_n$,

     il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A) - \varepsilon \leqslant \mu\big(\bigcup_{0 \leqslant n \leqslant N_\varepsilon} A_n\big)$, car μ est une mesure finie.

     On pose $F = \bigcup_{0 \leqslant n \leqslant N_\varepsilon} F_n$; Fest rermé, $F \subset \bigcup_{0 \leqslant n \leqslant N_\varepsilon} \subset A$

     $$\begin{aligned} \mu(A) - \varepsilon &= \mu\left(A \backslash \bigcup_{0 \leqslant n \leqslant N_\varepsilon} A_n\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{0 \leqslant n \leqslant N_\varepsilon} A_n \setminus F\right) + \mu(F) \\ &\leqslant \left(\sum_{0 \leqslant n \leqslant N_\varepsilon} \mu(A_n \backslash F_n)\right) + \mu(F) \\ &\leqslant \mu(F) + \varepsilon \end{aligned}$$

     $\mu(A) \leqslant 2\varepsilon + \mu(F)$

     Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F$ fermé et U ouvert tel que $F \subset A \subset U$ et $\mu(U \backslash A) \leqslant \varepsilon$ et $\mu(A \backslash F) \leqslant 2\varepsilon$.

     Donc $A \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ est bien une tribu. □

Déf. (E, d) un espace métrique, $\mu : \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$. μ est dite tendue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ compact tel que } \mu(E \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$$

Théorème d'Ulam. Soit (E, d) un espace métrique séparable complet. Soit $\mu : \mathcal{B}(E) \to [0, \infty[$ une mesure finie. Alors μ est tendue.

Preuve. Soit $x_q, q \in \mathbb{N}$ une suite dense dans E.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $E = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \bar{B}(x_q, 2^{-p})$.

$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu\big(\bigcup_{0 \leqslant q \leqslant n} \bar{B}(x_q, 2^{-p})\big)$

$\varepsilon > 0$. $\exists N_\varepsilon^{(p)} \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(E) - \varepsilon \leqslant \mu\Big(\bigcup_{0 \leqslant q \leqslant N_\varepsilon^{(p)}} \bar{B}(x_q, 2^{-p})\Big)$

On pose $K_\varepsilon = \bigcap_{p \geqslant 0} \bigcup_{0 \leqslant q \leqslant N_\varepsilon^{(p)}} \bar{B}(x_q, 2^{-p})$.

K_ε est fermé, et il est totalement borné (ou précompact).

$E \backslash K_\varepsilon = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(E \backslash \bigcup_{0 \leqslant q \leqslant N_\varepsilon^{(p)}} \bar{B}(x_q, 2^{-p}) \right)$

$\mu(E \backslash K_\varepsilon) \leqslant \sum_{p \in \mathbb{N}} \mu\left(E \backslash \bigcup_{0 \leqslant q \leqslant N_\varepsilon^{(p)}} \bar{B}(x_q, 2^{-p}) \right) \leqslant \varepsilon$. □

Théorème. (E, d) espace métrique séparable complet. $\mu: \mathcal{B}(E) \to [0, \infty[$ une mesure finie. Alors μ est régulière intérieurement pour les compacts.

Preuve. Soient $A \in \mathcal{B}(E)$, $\varepsilon > 0$.

$\exists F$ fermé, $F \subset A$ tel que $\mu(A \backslash F) < \varepsilon$

$\exists K_\varepsilon$ compact tel que $\mu(E \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$

On pose $K = F \cap K_\varepsilon$. K est un compact, et $K \subset A$.

$\mu(A) = \mu(F) + \mu(A \backslash F) \leqslant \mu(F) + \varepsilon = \mu(K) + \mu(F \backslash K) + \varepsilon \leqslant \mu(K) + \mu(E \backslash K_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant \mu(K) + 2\varepsilon$, ce qui termine la déminstration. □

Déf. (E, d) un espace métrique, $\mu: \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ une mesure positive.

1. μ est dite *de Radon* si

$$\forall K \text{ compact}, \mu(K) < \infty$$

2. E est dit localement compact si $\forall x \in E, \exists r > 0$ tel que $\bar{B}(x, r)$ est compact.

Exemples.

1. l_n sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est une mesure de Radon

2. $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante continue à droite. Sa mesure de Stieljes est de Radon. Rappel : c'est l'unique mesure $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ telle que $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$

Lemme. $(E,\ d)$ séparable localement compact. Il existe $K_n \subset E$, $n \in \mathbb{N}$ compacts tels que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et $\bigcup_{n \geqslant 0} K_n = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathring{K}_n = E$.

Preuve. $x_q, q \in \mathbb{N}$ une suite dense. On pose $S = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : \bar{B}(x_q, 2^{-p}) \text{ compact}\}$

$E = \bigcup_{(p,q) \in S} \bar{B}(x_q, 2^{-p})$

$x \in E, \exists r_x > 0$: $\bar{B}(x, r_x)$ est compact. $\exists q_x, p_x \in \mathbb{N}: d(x, x_{q_x}) \leqslant 2^{-p_x} < r_x/2$,

$x \in \bar{B}(x_{q_x}, 2^{-p_x}) \subset \bar{B}(x, r_x)$, donc $\bar{B}(x_{q_x}, 2^{-p_x})$ est compact, $(p_x, q_x) \in S$.

On pose $C_n = \bigcup_{\substack{(p,q) \in S \\ 0 \leqslant p, q \leqslant n}} \bar{B}(x_q, 2^{-p})$ compact. $C_n \subset C_{n+1} \subset E$ et $\bigcup_{n \geqslant 0} C_n = E$.

On définit $K_n, n \geqslant 0$ par récurrence:

- $K_0 = C_0$.

- On suppose K_0, ..., K_n construits. On recouvre $K_n \cup C_{n+1}$ par des boules ouvertes d'adhérence compacte. On trouve $B_1, \ldots, B_p$ un nombre fini de boules ouvertes d'adhérence compacte telle que $(K_n \cup C_{n+1}) \subset (B_1 \cup \cdots \cup B_p)$. On pose $K_{n+1} = \overline{B_1} \cup \cdots \cup \overline{B_p}$. $K_n \subset B_1 \cup \cdots \cup B_p \subset \mathring{K}_{n+1}$. □

Théorème. (E, d) localement compact séparable. Soit $\mu: \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ une mesure de Radon. Alors μ est régulière extérieurement pour les ouverts et intérieurement pour les compacts.

Preuve. Soit $K_n, n \in \mathbb{N}$ une suite de compacts tq $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et $E = \bigcup_{n \geqslant 0} K_n = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathring{K}_n$.

- Soit $A \in \mathcal{B}(E)$, si $\mu(A) = \infty$, alors $\mu(A) = \mu(E)$, on est régulier extérieurement.

- On suppose $\mu(A) < \infty$. On applique la régularité extérieure à la mesure $\mu_n = \mu\big(\cdot \cap \mathring{K}_n\big)$. $\mu_n(E) = \mu\big(\mathring{K}_n\big) \leqslant \mu(K_n) < \infty$ car μ est de Radon.

  $\exists U_n$ un ouvert tel que $A \subset U_n$ et $\mu\big(U_n \cap \mathring{K}_n\big) \leqslant \mu(A) + \varepsilon\, 2^{-n-1}$

  On pose $U = \bigcup_{n \geqslant 0} \big(U_n \cap \mathring{K}_n\big)$, c'est un ouvert et $A \subset U$ car $E = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathring{K}_n$.

  $\mu(U \backslash A) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \mu\big(\big(U_n \cap \mathring{K}_n\big) \backslash A\big) \leqslant \varepsilon$, donc μ est régulière extérieurement pour les ouverts.

- On pose $\nu_n = \mu(\cdot \cap K_n)$, $\nu_n(E) = \mu(K_n) < \infty$ (μ est de Radon)

  Sur (K_n, d) séparable complet, $A \cap K_n \in \mathcal{B}(K_n)$. $\nu_n: K_n \to [0, \infty[$ est une mesure finie

  (a) $\forall \varepsilon > 0, \exists C_n \subset K_n$ compact de (K_n, d) telle que

  $$\mu(A \cap K_n) - 2^{-n} = \nu_n(A) - 2^{-n} \leqslant \nu_n(C_n) = \mu(C_n)$$

  (b) $\mu(A) = \lim\uparrow_{n \to \infty} \mu(A \cap K_n)$

  $\mu(A) = \operatorname{limsup} \mu(A \cap K_n) \leqslant \operatorname{limsup} \mu(C_n)$, C_n compact et $C_n \subset A$.

  Donc $\sup\{\mu(C), C \text{ compactet } C \subset A\} \geqslant \mu(A) \geqslant \sup\{\mu(C), C \text{ compact et } C \subset A\}$, donc μ est réguilère intérieurement pour les compacts. ☐

II.6. Approximation des intégrales

Soit (E, d) un espace métrique, $f: E \to \mathbb{C}$ une fonction, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$

On note $C_b(E)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur E.

On note $\operatorname{Lip}(E)$ l'ensemble des fonctions Lipschitziennes de $E \to \mathbb{C}$ ($f: E \to \mathbb{C}$ est k-Lipshitzienne si $\forall x, y \in E, |f(x) - f(y)| \leqslant k\, d(x, y)$).

On note $\operatorname{Lip}_b(E) = C_b(E) \cap \operatorname{Lip}(E)$.

On note $\operatorname{support}(f) = \overline{\{x \in E: f(x) \neq 0\}}$

On note $C_c(E) = C_b(E) \cap \{f: E \to \mathbb{C} \text{ tq support}(f) \text{ est compact}\}$

On note $\operatorname{Lip}_c(E) = C_c(E) \cap \operatorname{Lip}(E)$.

Si $g \in C_c(E)$, $\|g\|_\infty < \infty$, alors $\forall x \in E, |g(x)| \leqslant \|g\|_\infty \mathbf{1}_K(x)$ si $\operatorname{support}(g) \subset K$.

Lemme. $(E, \mathcal{E}, \mu)$ espace mesuré, $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists s_\varepsilon: E \to \mathbb{C}$ étagée, μ-intébrable telle que $\int_E |f - s_\varepsilon| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$

Preuve. Cas de $f \geqslant 0$:

Il existe s_n, $n \geqslant 0$ étagées positives telle que $0 \leqslant s_n \leqslant s_{n+1} \leqslant f$ et $f = \lim\uparrow s_n$. Convergence monotone : $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim \int_E s_n \,\mathrm{d}\mu$.

$$\begin{cases} |f - s_n| = f - s_n \leqslant f \text{ intégrable} \\ |f - s_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \text{ ponctuellement} \end{cases}$$

Par convergence dominée, $\int_E |f - s_n| \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Raisonnement habituel pour les fonctions réelles, puis complexes. □

Théorème. (E, d) métrique. $\mu: \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ qui est régulière extérieurement pour les ouverts. Soit $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}(E), \mu)$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi_\varepsilon \in \mathrm{Lip}_b(E): \int_E |f - \phi_\varepsilon| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

Preuve. On fixe $\varepsilon > 0$. $\exists s_\varepsilon = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k \mathbf{1}_{A_k}: E \to \mathbb{C}$ mesurable

$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ que l'on suppose disjoints deux à deux. $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, cela implique $\mu(A_k) < \infty$, $1 \leqslant k \leqslant n$. $\int_E |f - s_\varepsilon| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon$

$\exists U_k$ ouvert tel que $A_k \subset U_k$ et $\mu(U_k \backslash A_k) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{n\, |c_k|}$.

On pose $\sigma_\varepsilon = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{U_k}$. $\int_E |\sigma_\varepsilon - s_\varepsilon| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

On fixe $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $g_m(x) = 1 \wedge (m\, d(x, E \backslash U_k))$. $g_m \in \mathrm{Lip}_b(E)$. $0 \leqslant g_m \leqslant g_{m-1} \leqslant \mathbf{1}_{U_k}$

Comme U_k est ouvert, $\lim\uparrow_{m\to\infty} g_m = \mathbf{1}_{U_k}$

$\int_E |\mathbf{1}_{U_k} - g_m| \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \forall \varepsilon > 0, \exists \phi_{k,\varepsilon} \in \mathrm{Lip}_b(E): \int_E |\mathbf{1}_{U_k} - \phi_{k,\varepsilon}| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{n\, |c_k|}$$

On pose $\phi_e = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k \phi_{k,\varepsilon}$. $\phi_\varepsilon \in \mathrm{Lip}_b(E)$

$\int |f - \phi_\varepsilon| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f - s_\varepsilon| \,\mathrm{d}\mu + \int |s_\varepsilon - \sigma_\varepsilon| \,\mathrm{d}\mu + \int |\sigma_\varepsilon - \phi_\varepsilon| \,\mathrm{d}\mu \leqslant 3\varepsilon$. □

2013-10-21

Théorème (rappel). (E, d) unespace métrique, $\mu: \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ une mesure positive. On suppose que μ est régulière extérieurement pour les ouverts. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}(E), \mu), \exists \varphi_\varepsilon \in \mathrm{Lip}_b(E): \int_E |f - \varphi_\varepsilon| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

Il est important de retenir la méthode de la démonstration.

Corollaire. Soit (E, d) un espace métrique, $\mu, \nu: \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ deux mesures régulières extérieurement pour les ouverts. Alors :

$$\mu = \nu \Leftrightarrow \left(\forall f \in \mathrm{Lip}_b(E), \int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_E \varphi \,\mathrm{d}\nu \right)$$

Corollaire. (E, d) espace métrique, $\mu: \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ une mesure finie quelconque. Soient f, $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}(E), \mu)$. Alors :

$$f = g \ \mu\text{-presque partout} \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathrm{Lip}_b(E), \int_E f \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_E g \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

Preuve. On suppose f et g à valeurs positives. On pose $\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ et $\pi(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu$. Donc ν et $\pi: \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}_+$ sont des mesures finies.

On suppose : $\forall \varphi \in \mathrm{Lip}_b(E), \int_E \varphi \,\mathrm{d}\nu = \int_E \varphi \,\mathrm{d}\pi$ $(*)$

Comme ν et π sont finies, elles sont régulières extérieurement pour les ouverts, donc $\nu = \pi$.

$f\,\mu = g\,\mu \Rightarrow f = g$ μ-presque partout.

On suppose maintenant f et g à valeurs réelles. On suppose $(*)$.

$\forall \varphi \in \mathrm{Lip}_b(E)$, $\int_E (f_+ + g_-)\,\varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_E (g_+ + f_-)\,\varphi\,\mathrm{d}\mu$, donc μ-presque partour, $f_+ + g_- = g_+ + f_-$, donc μ-presque partout $f = g$.

Si f et g sont à valeurs complexes, on se ramène au cas réel en considérant les parties réelles et imaginaires. $\square$

Théorème. (E, d) un espace métrique localement compact, séparable. Soit $\mu \colon \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ une mesure de Radon. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}(E), \mu), \exists \varphi_\varepsilon \in \mathrm{Lip}_c(E) : \int_E |f - \varphi_\varepsilon|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

(φ_ε lipschitzienne à support compact).

Preuve. $g \in C_c(E)$ (continue à support compact). $\exists K$ compact $\subset E$ tel que $|g| \leqslant \|g\|_\infty\,\mathbf{1}_K$, donc $\int_E |g|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \|g\|_\infty \mu(K) < \infty$, donc $C_c(E) \subset \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}(E), \mu)$.

On sait que μ est régulière extérieurement pour les ouverts. Soit $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}(E), \mu)$.

$\exists \psi_\varepsilon \in \mathrm{Lip}_b(E) : \int_E |f - \psi_\varepsilon|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon/3$.

On sait qu'il existe une suite de compacts $K_n \subset E, n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{K_n} \subset K_{n+1}$ et $\bigcup_{n \geqslant 0} K_n = E$.

$\left|\psi_\varepsilon\,\mathbf{1}_{E \setminus \mathring{K_n}}\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\left|\psi_\varepsilon\,\mathbf{1}_{E \setminus \mathring{K_n}}\right| \leqslant |\psi_\varepsilon|$ qui est μ-intégrable.

Donc $\int_E \left|\psi_\varepsilon\,\mathbf{1}_{E \setminus \mathring{K_n}}\right|\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Donc $\exists K$compact$\subset E$ tel que $\int_E \left|\psi_\varepsilon\,\mathbf{1}_{E \setminus \mathring{K}}\right|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon/3$

$\psi_\varepsilon\,\mathbf{1}_{\mathring{K}}$ à approcher par une fonction dans $\mathrm{Lip}_c(E)$.

On pose $g_p(x) = 1 \wedge \left(p\,d\left(x, E \setminus \mathring{K}\right)\right)$, $g_p \in \mathrm{Lip}_c(E)$

$0 \leqslant g_p(x) \leqslant g_{p+1}(x)$, et $\lim_{p \to \infty} \uparrow g_p(x) = \mathbf{1}_{\mathring{K}}$

Convergence dominée : $\int |\mathbf{1}_{\mathring{K}} - g|\,\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{3\,\|\psi_\varepsilon\|_\infty}$

$\int |\psi_\varepsilon\,\mathbf{1}_{\mathring{K}} - g\,\psi_\varepsilon|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \|\psi_\varepsilon\|_\infty \int_E |\mathbf{1}_{\mathring{K}} - g|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon/3$

On pose $\varphi_\varepsilon = \psi_\varepsilon\,g \in \mathrm{Lip}_c(E)$. $\int [f - \varphi_\varepsilon]\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$. $\square$

Corollaire. (E, d) localement compact séparable. $\mu, \nu \colon (E, \mathcal{B}(E)) \to [0, \infty]$ deux mesures de Radon.

$$\mu = \nu \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathrm{Lip}_c(E), \int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_E \varphi\,\mathrm{d}\nu$$

Corollaire. (E, d) localement compact séparable. $\mu \colon \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ une mesure sigma finie. f, $g \colon E \to \mathbb{C}$ deux fonction mesurables telles que $\forall K$ compact $\subset E$, $\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$ et $\int_E |g|\,\mathrm{d}\mu < \infty$. Alors :

$$f = g \;\; \mu\text{-presque partout} \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathrm{Lip}_c(E), \int_E f\,\varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_E g\,\varphi\,\mathrm{d}\mu$$

Proposition. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), l_n)$. Alors :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x + \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est mesurable

2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\tau_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(y)| \, l_n(\mathrm{d}y)$$

τ_f est bornée et $\lim_{x \to 0} \tau_f(x) = 0$.

Preuve. Add : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x + y$ est continue donc mesurable, donc $f \circ \mathrm{Add}$: $(x, y) \mapsto f(x+y)$ est mesurable. Donc $f(x + \cdot)$ est l'application partielle, et est donc mesurable.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi_\varepsilon \in \mathrm{Lip}_c(E) : \int_{\mathbb{R}^n} |f - \phi_\varepsilon| \, \mathrm{d}l_n < \infty$

$\tau_{\phi_e}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\varepsilon(x + \cdot) - \phi_\varepsilon| \, \mathrm{d}l_n$ est continue et bornée (théorème de continuité des intégrales à paramètres).

$$\begin{aligned} |\tau_f(x) - \tau_{\phi_\varepsilon}(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x + \cdot) - f| - |\phi_\varepsilon(x + \cdot) - \phi_\varepsilon|) \, \mathrm{d}l_n \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |(|f(x + \cdot) - f| - |\phi_\varepsilon(x + \cdot) - \phi_\varepsilon|)| \, \mathrm{d}l_n \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + \cdot) - \phi_\varepsilon(x + \cdot)| \, \mathrm{d}l_n + \int_{\mathbb{R}^n} |f - \phi_\varepsilon| \mathrm{d}l_n \\ &\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

II.7. Convolution

Déf. $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mesurable, $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) g(y)| \, \mathrm{d}l_n(y) < \infty$. On pose :

$$f{*}g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \, g(y) \, l_n(\mathrm{d}y)$$

$f{*}g(x)$ est la *convolution* de f par g en x.

On a $f{*}g(x) = g{*}f(x)$.

Déf. Fonctions définies μ-presque partout. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. f définie μ-presque partout est la donnée de $D \subset E$, $N \in \mathcal{E}$ et $f_0 : E \to \mathbb{C}$ $\mathcal{E}$-mesurable telle que :

1. $f : D \to \mathbb{C}$

2. $E \setminus D \subset N$ et $\mu(N) = 0$

3. $f \, \mathbf{1}_{E \setminus N} = f_0 \, \mathbf{1}_{E \setminus N}$

Si f_1, N_1 tels que $f \, \mathbf{1}_{E \setminus N_1} = f_1 \, \mathbf{1}_{E \setminus N_1}$ et $\mu(N_1) = 0$, alors $f_0 = f_1$ μ-presque partout, et $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_E |f_0| \, \mathrm{d}\mu$.

Déf/Prop. Soient f, g définies l_n-presque partout, intégrables ($\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |g| < \infty$). Alors :

- $f{*}g$ est définie l_n-presque partout

- $\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| \, \mathrm{d}l_n \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f| \mathrm{d}l_n {}_{\mathbb{R}^n} |g| \, \mathrm{d}l_n$

- $\int_{\mathbb{R}^n} f{*}g \, \mathrm{d}l_n = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}l_n \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \, \mathrm{d}l_n \right)$

- $f{*}(g+h) = f{*}g + f{*}h$; $f{*}g = g{*}f$; $f{*}c\,g = c\,(f{*}g)$; $f{*}(g{*}h) = (f{*}g){*}h$

Preuve. On suppose que $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), l_n)$.

$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, l_n(\mathrm{d}x)\, l_n(\mathrm{d}y) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|\, \mathrm{d}l_n\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|\, \mathrm{d}l_n\right) < \infty$ (Fubini positif)

Donc par Fubini pour l_n-presque tout x, $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, \mathrm{d}l_n(y) < \infty$. $f{*}g$ est donc bien définie l_n-presque partout. Par Fubini encore on obtient le reste de la proposition.

Régularisation.

Proposition. f, φ définies l_n-presque partout. On suppose f l_n-intégrable, et φ bornée l_n-presque partout ($\exists k \in \mathbb{R}_+ : |\varphi| < k$ l_n-presque partout). Alors $f{*}\varphi$ est définie partout et est uniformément continue.

Preuve. En exo.

Notation. $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $\partial_{\vec{p}} = \dfrac{\partial^{|\vec{p}\,|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}}$, où $|\vec{p}\,| = p_1 + \cdots + p_n$.

On note $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}) \cap C_c(\mathbb{R}^n)$ (à support compact)

Lemme. $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et f l_n-intégrable. Alors $\varphi{*}f$ est $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\partial_{\vec{p}}\,(f{*}\varphi) = f{*}(\partial_{\vec{p}}\,\varphi)$

Preuve. $\varphi{*}f(x) = \int \varphi(x-y)\, f(y)\, l_n(\mathrm{d}y)$, puis théorème de dérivation sous l'intégrale.

Approximation de l'unité (de δ_0).

Problème. il n'existe pas de fonction u l_n-intégrable (définie l_n-presque partout) telle que $f{*}u = u{*}f = f$.

L'élément neutre pour $*$ est la masse de Dirac δ_0 (c'est une mesure et non une fonction).

Idée. « Approcher » δ_0 par des mesures $\varphi_p\, l_n, p \in \mathbb{N}$

Déf. $\varphi_p \in C_b(\mathbb{R}^n), p \in \mathbb{N}$. C'est une approximation de δ_0 (approximation de l'unité) si :

1. $\forall p \in \mathbb{N}, \varphi_p = 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_p\, \mathrm{d}l_n = 1$

2. $\forall \varepsilon > 0, \lim_{p\to\infty} \int_{\{\|x\| > \varepsilon\}} \varphi_p\, \mathrm{d}l_n = 0$

Exemple. $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi \geqslant 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, \mathrm{d}l_n = 1$. Soit $r_p \uparrow \infty$, on pose $\varphi_p(x) = r_p^n\, \varphi(r_p\, x)$. $(\varphi_p)_{p \geqslant 0}$ approche δ_0.

Lemme. $(\varphi_p)_{p\geqslant 0}$ approximation de δ_0. Alors :

1. Si $f \in C(\mathbb{R}^n)$, alors $\lim_{p\to\infty} \varphi_p{*}f = f$ uniformément sur tout compact.

2. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), l_n)$ (voire même f définie l_n-pp et l_n-intégrable). Alors

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_p{*}f - f|\, \mathrm{d}l_n = 0$$

Preuve. Preuve de (2) :

Posont $\tau_f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+z) - f(x)|\, l_n(\mathrm{d}x)$

$\varphi_p{*}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, \varphi_p(y)\, l_n(\mathrm{d}y)$

$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \varphi_p(y)\, l_n(\mathrm{d}y)$

$|\varphi_p{*}f(x) - f(x)| \leqslant \int \varphi_p(y)\, |f(x-y) - f(x)|\, l_n(\mathrm{d}y)$

$\int \ |\varphi_p{*}f - f|\, \mathrm{d}l_n \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_p(y)\, \tau_f(-y)\, l_n(\mathrm{d}y)$

$|\tau_f| \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, \mathrm{d}l_n$.

$\varepsilon > 0$, $\int \ |\varphi_p{*}f - f|\, \mathrm{d}l_n \leqslant 2 \int \ |f|\, \mathrm{d}l_n \int_{\{\|y\| > \varepsilon\}} \phi_p(y) + \sup_{y:\, \|y\| < \varepsilon} \tau_f(-y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_p\, \mathrm{d}l_n}_{\leqslant 1}$

$\limsup_{p \to \infty} \int \ |\varphi_p{*}f - f|\, \mathrm{d}l_n \leqslant \sup_{y:\, \|y\| \leqslant \varepsilon} \tau_f(-y) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$. □

Théorème. $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ une mesure de Radon.

$$\forall \varepsilon, \forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu), \exists \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(E) : \int_{\mathbb{R}^n} |f - \phi_\varepsilon|\, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

Preuve. $(\varphi_p)_p$ approche δ_0 avec $\varphi_p \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Par exemple, $\varphi^0 = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1 - \|x\|^2}\right) & \text{sur } B(0,1) \\ 0 & \text{si } \|x\| \geqslant 1 \end{cases}$, $\varphi^0 = \psi \circ (\|\cdot\|^2)$, on montre que ψ est bien définie et C^∞. On prend maintenant $\varphi = c^{-1}\, \varphi^0$ avec $c = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^0\, \mathrm{d}l_n$, puis $\varphi_p = p^n \varphi(p\, x)$, $\varphi_p \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $(\varphi_p)_{p \geqslant 0}$ approche δ_0.

La proposition précédente implique $\lim_{p \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f - \varphi_p{*}f|\, \mathrm{d}l_n = 0$, $\varphi_p{*}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2013-10-23

Convolution de mesures

Déf. Soient $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ deux mesures finies. On note $\mu{*}\nu$ la mesure image de $\mu \otimes \nu$ par $\mathrm{Add} : (x, y) \mapsto x + y$. $\mu{*}\nu$ est une mesure finie sur $\mathbb{R}^n$, appellée la *convoluée* de μ et ν.

$$\forall f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty] \text{ mesurable}, \int_{\mathbb{R}^n} f\, \mathrm{d}(\mu{*}\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^n} \nu(\mathrm{d}y)\, f(x + y)$$

Prop.

- $\mu{*}\nu(\mathbb{R}^n) = \mu(\mathbb{R}^n)\nu(\mathbb{R}^n)$
- $\mu{*}\nu = \nu{*}\mu$
- $\mu{*}\delta_0 = \mu$
- Si $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, f, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), l_n)$, en posant $\mu = f\, l_n$ et $\nu = g\, l_n$, alors on a $\mu{*}\nu = (f{*}g) l_n$.

II.8. Transformée de Fourier

$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaira canonique $\langle \cdot / \cdot \rangle$. $\|x\| = \sqrt{\langle x/x \rangle}$

Déf. Soit f définie l_n-presque partout l_n-intégrable. $\forall u \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle u/x \rangle} f(x) l_n(\mathrm{d}x)$$

$\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est la transformée de Fourier de f. $\hat{f}$ est C^0 bornée, et $\|\hat{f}\| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, \mathrm{d}l_n$

Exemple. Densité gaussienne. On a montré que $\forall u \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} e^{iux}\, e^{-x^2/2}\, l(\mathrm{d}x) = \sqrt{2\pi}\, e^{-u^2/2}$.

On fixe $\sigma > 0$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ g_\sigma(x) = \dfrac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})} \exp\left(\dfrac{-1}{2\sigma^2}\|x\|^2\right)$

$g_\sigma(x) = \sigma^{-n} g_1\left(\frac{1}{\sigma}x\right)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} g_\sigma \, \mathrm{d}l_n = 1$

$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \hat{g}_\sigma(u) = \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2}\|u\|^2\right) = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\right)^n g_{\frac{1}{\sigma}}(u)$.

Si $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $x^{\vec{p}} = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$. $(x^{\vec{0}} = 1)$.

Déf. Une fonction polynomiale $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction de la forme $P(x) = \sum_{\vec{p} \in \mathbb{N}^n} a_{\vec{p}} \, x^{\vec{p}}$, où les $a_{\vec{p}}$ sont nuls sauf un nombre finis.

On note $\partial_{\vec{p}} = \frac{\partial^{|\vec{p}\,|}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial_{x_n}^{p_n}}$, où $|\vec{p}\,| = \sum p_i$.

On pose $P(\partial) = \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \partial_{\vec{p}}$. Pour $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a donc $P(\partial) \cdot \psi = \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \frac{\partial^{|\vec{p}\,|}\varphi}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial_{x_n}^{p_n}}$.

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $\forall \vec{p}\,, \forall \vec{q}\,$, $\sup |x^{\vec{q}} \partial_{\vec{p}} \psi(x)| < \infty$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est appellée *classe de Shwarz*.

Exo. $g_\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Rmq. $\forall P$ polynomiale, $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall \vec{p} \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\| > r}} |P(x) \, \partial_p \psi(x)| \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

Prop. $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, P fonction polynomiale.

1. $\hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
2. $P(\partial)\hat{\psi}(u) = \left(\widehat{P(-i\cdot)\psi(\cdot)}\right)(u)$, avec $P(-i\cdot)\,\psi(\cdot) \colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & P(i\,x)\psi(x) \end{cases}$
3. $\widehat{P(\partial)\psi}\,(u) = P(-i\,u)\hat{\psi}(u)$.

Preuve.

(2) : dérvation sous $\int$:

$\frac{\partial}{\partial u_j}\hat{\psi}(u) = \int e^{i\langle u,x\rangle}\, i\, x_j\, \psi(x)\, l_n(\mathrm{d}x)$

$\vec{p} \in \mathbb{N}^n$

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\|x^{2m}\| = (\sum x_i^2)^m$ est une fonction polynomiale

$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\|x\|^{2m} P(x) \partial_{\vec{p}} \psi(x)| < \infty$

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\exists C_{\vec{p}\,, P, \psi, m, n} \in [0, \infty[$ tel que $|P(x)\partial_{\vec{p}}\psi(x)| \leqslant C\,(1 \wedge \|x\|^{-m-1})$

$\int 1\|x\|^{-m-1} l_n(\mathrm{d}x) = c_n \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^{m-1}(1 \wedge r^{-m-1}) \leqslant 1 + \int_1^\infty r^{-2}\mathrm{d}r < \infty$

Donc $P(x)\,\partial_{\vec{p}}\psi(x)$ est l_n-intégrable

(3) : Cas dimension 1 : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(d^{iux}\psi(x)) = i\,u\,e^{iux}\psi(x) + e^{iux}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\psi(x)$

$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(e^{iux}\psi(x)) l(\mathrm{d}x) = e^{iux}\psi(x) - e^{-iux}\psi(-x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

Donc $\int_{\mathbb{R}} e^{iux}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)\, l(\mathrm{d}x) = -i\,n \int e^{iux}\psi(x) l(\mathrm{d}x)$.

En faisant de même pour chaque coordonnée, on obtient (3)

(1) : $\vec{p}\,, \vec{q} \in \mathbb{N}^n$. On pose $\varphi(x) = (i\,x)^{\vec{p}}\psi(x)$. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (clair).

$\widehat{\partial_{\vec{p}}\varphi}(u) = (-i)^{\vec{q}} u^{\vec{q}} \partial_{\vec{p}} \hat{\varphi}(u)$

$\sup_{u\in\mathbb{R}^n} |u^{\vec{q}} \partial_{\vec{p}} \hat{\varphi}(u)| \leqslant \left\| \widehat{\partial_{\vec{q}}\varphi} \right\|_\infty \leqslant \int \; |\partial_{\vec{q}}\varphi| \mathrm{d}l_n < \infty$

□

Lemme de Riemann-Lebesgue. Soit f définie l_n-presque partout et l_n-intégrable. Alors $\sup_{u\in\mathbb{R}^n, \|u\|>r} \left|\hat{f}(u)\right| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$, ie $\hat{f} \to 0$ « en l'infini ».

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $\int_{\mathbb{R}^n} |f - \psi| \mathrm{d}l_n < \varepsilon$

Donc $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\left|\hat{f}(u)\right| \leqslant \varepsilon + \left|\hat{\psi}(x)\right|$

$\sup_{u\in\mathbb{R}^n, \|u\|>r} \left|\hat{f}(u)\right| \leqslant \varepsilon + \underbrace{\sup_{u\in\mathbb{R}^n, \|u\|>r} \left|\hat{\psi}(u)\right|}_{\xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \text{ car } \hat{\psi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 2\varepsilon$ pour $r \geqslant r_0$

□

Déf. Soit $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ une mesure finie. $\forall u \in \mathbb{R}^n$, on pose $\hat{\mu}(u) = \int \; e^{i\langle u/x\rangle} \mu(\mathrm{d}x)$. $\hat{\mu}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est bien définie, $\mathcal{C}^0$ bornée. $\|\hat{\mu}\|_\infty \leqslant \mu(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R}^n)$.

Prop.

1. Soient $\mu, \nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ deux mesures finies.

$$\widehat{\mu*\nu}\;(u) = \hat{\mu}(u)\,\hat{\nu}(u), u \in \mathbb{R}^n$$

2. f, g définies l_n-presque partout et l_n-intégrables. $\widehat{f*g}(u) = \hat{f}(u)\,\hat{g}(u)$

Preuve.

1. $e^{i\langle u, x+y\rangle} = e^{i\langle u,x\rangle}\, e^{i\langle u,y\rangle}$

$$\int e^{i\langle u,z\rangle}\, \mu*\nu(\mathrm{d}z) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^n} \nu(\mathrm{d}y)\, e^{i\langle u,x+y\rangle}$$

   Fubini : ok.

2. Idem.

Théorème. Soient $\mu, \nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ deux mesures finies, f, g définies l_n-presquepartout et l_n-intégrables.

1. $\hat{\mu} = \hat{\nu} \Leftrightarrow \mu = \nu$

2. $\hat{f} = \hat{g} \Leftrightarrow f = g$ μ-presque partout

(on a injectivité de la transformée de Fourier).

Preuve. Plusieurs étapes. On prouve (1) :

$\forall \sigma > 0, g_\sigma(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\|x\|^2\right)$

On pose $g_\sigma * \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\sigma(x - y)\, \mu(\mathrm{d}y)$

Par théorème de continuité sous l'intégrale, $g_\sigma * \mu$ est $\mathcal{C}^0$.

$\|g_\sigma * \mu\|_\infty \leqslant \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n} \mu(\mathbb{R}^n)$ $(\hat{g}_{1/\sigma} = \left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n g_\sigma$

Lemme A. $\sigma > 0$, μ mesure finie. Alors $g_\sigma * \mu(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi^2}{2}\|x\|^2} e^{i\langle x,u\rangle} \hat{\mu}(-u) l(\mathrm{d}x)$

Preuve.

$$\begin{aligned}
g_\sigma * \mu(x) &= \int g_\sigma(x-y)\mu(\mathrm{d}y)\\
&= (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n}\int \hat{g}_{1/\sigma}(x-y)\mu(\mathrm{d}y)\\
&= (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\mu(\mathrm{d}y)\int_{\mathbb{R}^n} l_n(\mathrm{d}w)e^{-i\langle w,x-y\rangle}g_{1/\sigma}(w)\\
&= (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\mu(\mathrm{d}y)\int_{\mathbb{R}^n} l_n(\mathrm{d}w)e^{i\langle x-y,w\rangle}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right)^{-n}\exp\left(\frac{-\sigma^2}{2}\|w\|^2\right)\\
&\overset{\text{fubini}}{=} (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} l_n(\mathrm{d}w)e^{-\frac{\sigma^2}{2}\|w^2\|}e^{i\langle x,w\rangle}\underbrace{\int\mu(\mathrm{d}y)e^{-i\langle g,w\rangle}}_{=\hat{\mu}(-w)}
\end{aligned}$$

Intérêt. Si $\hat{\mu}=\hat{\nu}$, alors $g_\sigma*\mu=g_\sigma*\nu$ $\forall\sigma>0$

On fixe $\psi\in C_c(\mathbb{R}^n)$

$\forall\delta>0$, $w_\psi(\delta)=\sup\{|\psi(x)-\psi(y)|, x,y\in\mathbb{R}^n : \|x-y\|\leqslant\delta\}$

ψ est uniformément continue, $\lim_{\delta\to 0} w_\psi(\delta)=0$; $\delta\mapsto w_\psi(\delta)$ croit ; $w_\psi(\delta)\leqslant 2\|y\|_\infty$

Lemme B. $\psi\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $\sigma>0$. Alors :

$$\left|\int\psi\mathrm{d}\mu-\int\psi\, g_\sigma*\mu\,\mathrm{d}l_n\right|\leqslant\mu(\mathbb{R}^n)\underbrace{\int g_\sigma(z)w_\psi(\sigma\|z\|)l_n(\mathrm{d}z)}_{\xrightarrow[\sigma\to 0]{}0}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\int\psi\, g_\sigma*\mu\,\mathrm{d}l_n &= \int_{\mathbb{R}^n}\mu(\mathrm{d}y)\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}l_n(x)\,\psi(x)\,g_\sigma(x-y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\mu(\mathrm{d}y)\int\mathrm{d}l_n(x)g_\sigma(x)\,\psi(x+y)\\
\int\psi\,\mathrm{d}\mu &= \int\psi(y)\,\mu(\mathrm{d}y)\\
&= \int\mu\,\mathrm{d}y\underbrace{\int g_\sigma(x)\psi(y)l_n(\mathrm{d}x)}_{=\psi(y)}\text{ car }\int g_\sigma\mathrm{d}l_n=1\\
a &= \int\psi\, g_\sigma*\mu\,\mathrm{d}l_n-\int\psi\mathrm{d}\mu\\
&= \int\mu(\mathrm{d}y)\int l_n(\mathrm{d}x)\,g_\sigma(x)\,(\psi(x+y)-\psi(y))\\
|a| &\leqslant \int\mu(\mathrm{d}y)\int l_n(\mathrm{d}x)\,g_\sigma(x)\,w_\psi(\|x\|)\\
&\leqslant \mu(\mathbb{R}^n)\int l_n(\mathrm{d}x)\,g_\sigma(x)\,w_\psi(\|x\|)\\
&\leqslant \mu(\mathbb{R}^n_*)\int_{\mathbb{R}^n} l_n(\mathrm{d}x)\,g_\sigma(x)\,w_\psi(\sigma\|x\|)\\
&\xrightarrow[r\to 0]{} 0\text{ (par convergence dominée)}\\
g_\sigma(x) &= \frac{1}{\sigma}g_{\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{1}{\sigma}x\right)
\end{aligned}$$

Fin de la démonstration : $\hat{\mu}=\hat{\nu}$, A s'applique :

$\forall\sigma>0$, $g_\sigma*\mu=g_\sigma*\nu$. $\forall\psi$, $\int\psi\mathrm{d}\mu=\int\psi\mathrm{d}\nu$, donc d'après le corollaire précédent $\nu=\mu$

On remplace $g_\sigma*\nu$ par $g_\sigma*f$.

2013-10-28

Résultats obtenus : les deux lemmes précédents.

(A) : $g_\sigma * \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\sigma(x-y)\,\mu(\mathrm{d}y) = (2\pi)^{-n}\int e^{-\sigma^2/2}\,\|x\|^2 e^{i\langle x,u\rangle}\hat{\mu}(-x) l_n(\mathrm{d}x)$

(B) : $\forall\psi\in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\forall\sigma>0$, $|\int \psi \mathrm{d}\mu - \int \psi g_\sigma * \mu \mathrm{d}l_n| \leqslant \mu(\mathbb{R}^n)\int_{\mathbb{R}^n} g(z) w_\psi(\sigma\|z\|)\mathrm{d}l_n(z) \xrightarrow[\sigma\to 0]{} 0$

où w_ψ est le module d'uniforme continuité de ψ.

Théorème d'injectivité de la transfo de Fourier. (cf ci-dessus).

$C_c(\mathbb{R}^n)$: fonctions à support compact.

Prpopsition. δ_0 est l'uniue mesure finie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ telle que $\mu * \delta_0 = \delta_0 * \mu = \mu$ pour toute mesure finie μ.

Preuve. Soit ν telle que $\nu * \mu = \mu$. $\forall u\in\mathbb{R}^n$, $\hat{\nu}(u)\hat{\mu}(u) = \hat{\mu}(u)$ $\forall\mu$ mesure finie.

$\mu = \delta_x$, $\hat{\mu}(u) = \exp(i\langle u,x\rangle) \Rightarrow \hat{\nu}(u) = 1$ $\forall u\in\mathbb{R}^n$

Or $1 = \hat{\delta_0}(u)$, donc $\nu = \delta_0$.

Théorème d'inversion. Soit $\mu\colon\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^+$ une mesure finie, $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),l_n)$. On suppose que $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|\mathrm{d}l_n < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\mu}|\,\mathrm{d}l_n < \infty$. Alors :

1. $\exists h\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ mesurable telle que $\mu = h\,l_n$, et

$$h(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u,x\rangle} l_n(\mathrm{d}u)$$

   On voit que h est continue, bornée et tend vers 0 en l'infini par Riemann-Lebesgue.

2. On a pour l_n-preque tout x,

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u,x\rangle}\hat{f}(u) l_n(\mathrm{d}u)$$

Preuves.

1. Par le lemme (A), $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\forall\sigma>0$, $\lim_{\sigma\to 0} g_\sigma * \mu(x) = h(x)$.

   Par convergence dominée, $|(g_\sigma * \mu)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\hat{\mu}(x)|\, l_n(\mathrm{d}x)$, $\forall\sigma>0, \forall x\in\mathbb{R}^n$

   $|\psi(x)\, g_\sigma * \mu(x)| \leqslant c\,|\psi(x)|$, ψ est l_n-intégrable.

   Par convergence dominée, $\int \psi\, g_\sigma * \mu\,\mathrm{d}l_n \xrightarrow[\sigma\to 0]{} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\, h\, l_n(\mathrm{d}x)$

   Mais par (B), on a $\int \psi\, g_\sigma * \mu\,\mathrm{d}l_n \xrightarrow[\sigma\to 0]{} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\,\mathrm{d}\mu$

   Donc $\forall\psi\in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n}\psi\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^n}\psi\, h\,\mathrm{d}l_n$

   $\bar{h} = h$, donc $h(x)\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^n$

   h est continue.

   En raisonnant par l'absurde en supposant que $U = \{h<0\}$ est non vide, soit $x\in U$, $\exists r>0\colon B(x,r)\subset U$.

   $\exists f$ fonction linéaire valant 1 sur $[0,r/2]$, affine sur $[r/2,r]$ et nulle sur $[r,\infty]$. $\psi(x) = f(\|x\|)$, support $\psi = \bar{B}(x,r)$. $\psi\in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\int \psi\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0$; $\int_{\mathbb{R}^n}\psi\, h\,\mathrm{d}l_n < 0$.

Absurde, donc $U = \varnothing$, donc $h \geqslant 0$.

On pose $\nu = h\,\mathrm{d}l_n$, c'est une mesure positive finie telle que $\int \psi\,\mathrm{d}\mu = \int \psi\,\mathrm{d}\nu\ \forall \psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$

Par un résultat d'approximation, $\mu = \nu$

2. Similaire.

Exemple d'application. On a $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-|x|} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int \frac{e^{iux}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$

Preuve. En exo. Utiliser une inversion de Fourier.

II.9. Une première approche de la convergence étroite des mesures

Déf. On se donne une suite $\mu_p : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{N}$ de mesures finies, et une mesure finie $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$. La suite $(\mu_p)_{p \in \mathbb{N}}$ *converge étroitement* vers μ si

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \psi\,\mathrm{d}\mu_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\,\mathrm{d}\mu$$

Remarque. La convergence étroite correspond à une topologie métrique : elle est entièrement déterminée par la définition précédente. Il existe une métrique correspondant à la convergence étroite qui est séparable et complète.

Lemme. Si $\lim_p \mu_p = \mu$ et si $\lim_p \mu_p = \nu$ étroitement, alors $\mu = \nu$.

Preuve. Donc $\forall \psi \in C_b(\mathbb{R}^n)$, $\int \psi\,\mathrm{d}\mu = \int \psi\,\mathrm{d}\nu$, donc $\mu = \nu$ par un résultat de densité.

Lemme. Soient μ_p, $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{N}$ des mesures finies, alors $\lim_p \mu_p = \mu$ étroitement ssi $\underbrace{\mu_p(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[p\to\infty]{} \mu(\mathbb{R}^n) \text{ et } \forall \psi \in C_c(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \psi\,\mathrm{d}\mu_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\,\mathrm{d}\mu}_{(*)}$.

Preuve. On suppose $(*)$. On fixe $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

On fixe $r > 0$ et on définit $f : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ continue telle que $f(x) = 1$ si $x \leqslant r$, f est affine sur $[r, r+1]$ et $f(x) = 0$ si $x \geqslant r+1$.

On pose $\phi_r(x) = f(\|x\|)$.

$\forall r \leqslant r', \mathbf{1}_{\bar{B}(0,r)} \leqslant \phi_r \leqslant \phi_{r'} \leqslant \mathbf{1}_{\bar{B}(0,r'+1)}$.

$\phi_r \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

$\forall \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ mesure finie, $\left|\int_{\mathbb{R}^n} \phi_r \varphi\,\mathrm{d}\nu - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\mathrm{d}\nu\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} (1-\phi_r)\,\varphi\,\mathrm{d}\nu\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty\,(\nu(\mathbb{R}^n) - \int \phi_r\,\mathrm{d}\nu)$

$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\mathrm{d}\mu_p - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^n} \phi_r\,f\,\mathrm{d}\mu_p - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_r\,\varphi\,\mathrm{d}\mu\right| + \|\varphi\|_\infty(\mu_p(\mathbb{R}^n) + \mu(\mathbb{R}^n) - \int \phi_r\,\mathrm{d}\mu_p - \int \phi_r\,\mathrm{d}\mu)$

$\operatorname{limsup}_{p\to\infty} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\mathrm{d}\mu_p - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant 2\|\varphi\|_\infty(\mu(\mathbb{R}^n) - \int \phi_r\,\mathrm{d}\mu)$

$\phi_r \uparrow \mathbf{1}$ lorsque $r \to \infty$, donc par convergence monotone $\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_r\,\mathrm{d}\mu = \mu(\mathbb{R}^n)$.

Donc $\operatorname{limsup}_{p\to\infty} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\mathrm{d}\mu_p - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\mathrm{d}\mu\right| = 0$. □

Théorème de continuité de Paul LÉVY. Soient $\mu_p, \mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{N}$ des mesures finies. Il y a équivalence entre :

1. $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{p\to\infty} \hat{\mu}_p(u) \to \hat{\mu}(u)$

2. $\mu_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \mu$ étroitement

Preuve. $(2) \Rightarrow (1)$: $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto e^{i\langle u,x\rangle}$ est bornée et continue, donc $\hat{\mu}_p(u) \xrightarrow[p\to\infty]{} \hat{\mu}(u)$.

$(1) \Rightarrow (2)$: $\hat{\mu}_p(0) = \mu_p(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[p\to\infty]{} \hat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R}^n)$

D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que $\forall \psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \psi \,\mathrm{d}\mu_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} \psi \,\mathrm{d}\mu$.

On pose $C = \mu(\mathbb{R}^n) + \sup_{p>0} \mu_p(\mathbb{R}^n) < \infty$.

Par convergence dominée, par (1) et par (A) : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g_\sigma * \mu_p(x) \to g_\sigma * \mu(x)$.

Donc par convergence dominée, $\lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\, g_\sigma * \mu_p \,\mathrm{d}l_n = \int \psi\, g_\sigma * \mu \,\mathrm{d}l_n$.

Par (B), on a aussi $|\int \psi \,\mathrm{d}\mu_p - \int \psi \,\mathrm{d}\mu| \leqslant |\int \psi\, g_\sigma * \mu_p \,\mathrm{d}l_n - \int \psi\, g_\sigma * \mu \,\mathrm{d}l_n| + 2\,C \int_{\mathbb{R}^n} g_1(z) \omega_+(\sigma\|z\|) \,\mathrm{d}l_n$

$\mathrm{limsup}_{p\to\infty} |\int \psi \,\mathrm{d}\mu_p - \int \psi \,\mathrm{d}\mu| \leqslant 2\,C \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} g_1(z)\, \omega_\psi(\sigma\|z\|) \,\mathrm{d}l_n(z)}_{\xrightarrow[\sigma\to 0]{} 0}$

Donc $\lim_{p\to\infty} \int \psi \,\mathrm{d}\mu_p = \int \psi \,\mathrm{d}\mu$. □

Théorème. $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une application bijective. Sa réciproque est donnée par $\psi \mapsto (2\pi)^{-n}\, \hat{\psi}(-\cdot)$ (théorème d'inversion).

Preuve. Immédiat à partir des résultats précédents.

III. Espaces L^p

III.1. Inégalités

Rappel. Si I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, une fonction $\varphi: I \to \mathbb{R}$ est *convexe* si $\forall x$, $y \in I, \forall \theta \in [0,1]$, $\psi(\theta\, x + (1-\theta)\, y) \leqslant \theta\, \psi\,(x) - (1-j)\, \psi\,(y)$

Si ψ est dérivable de dérivée croissante, alors elle est convexe.

$-\log:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est convexe.

On pose $S_\varphi = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in I, a\, x + b \leqslant \varphi(x)\}$. $\forall x \in I, \varphi(x) = \sup_{(a,b)\in S_\varphi} (a\, x + b)$.

(preuve laissée en exo).

Dans tout le chapitre III. On fixe $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

Prop (intégalité de Jensen). On suppose $\mu: \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ finie non nulle. On se donne $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$. On se donne $\varphi: I \to \mathbb{R}$ convexe. On suppose que $\forall x \in E$, $f(x) \in I$ et $\varphi(f) \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$. Alors :

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \,\mathrm{d}\mu \in I \text{ et } \varphi\!\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \,\mathrm{d}\mu\right) \leqslant \frac{1}{\mu(E)} \int_E \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu$$

Preuve. $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \,\mathrm{d}\mu \in I$ laissé en exercice.

$\forall (a,b) \in S_\varphi$, $\forall y \in I$, $a\, y + b \leqslant \varphi(y)$.

$\forall x \in E, a\, f(x) + b \leqslant \varphi(f(x))$

$a \int_E f \,\mathrm{d}\mu + b\, \mu(E) \leqslant \int_E \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu$

$a\Big(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu\Big)+b\leqslant\frac{1}{\mu(E)}\int_E \varphi\circ f\,\mathrm{d}\mu$

On obtient l'égalité en passant au suprémum sur $(a,b)\in S_\varphi$.

Lemme. Soient $s,t\in]0,\infty[$, $b\in]0,1[$. Alors :

$$s^b\,t^{1-b}\leqslant b\,s+(1-b)\,t$$

Preuve. $-\log$ est convexe. $-\log(b\,s+(1-b)\,t)\leqslant -b\log(s)-(1-b)\log(t)$

Et on obtient donc le résultat voulu.

Déf. Si $p\in]1,\infty[$, on note $q\in]1,\infty[$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. On dit que p et q sont *conjugués*.

Prop (inégalité de Hölder). Soit $p\in\,]1,\infty[$ et q son conjugué. Soient $f,\,g\colon E\to[0,\infty]$ $\mathcal{E}$-mesurables. Alors :

$$\int_E f\,g\,\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int_E f^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E g^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Avec pour convention que $0\times\infty=0$ et $\infty^c=\infty$ si $c>0$.

Preuve. On pose $c=\big(\int_E f^p\,\mathrm{d}\mu\big)^{1/p}$ et $d=\big(\int_E g^q\,\mathrm{d}\mu\big)^{1/q}$.

Si c et d sont infinies ou nulles, l'inégalité est triviale. On suppose donc $c,d\in]0,\infty[$.

Le lemme précédent appliqué à $s=\Big(\frac{f(x)}{c}\Big)^p$ et $t=\Big(\frac{g(x)}{d}\Big)^q$, et $b=\frac{1}{p}$ donc $1-b=\frac{1}{q}$

$$\forall x\in E,\frac{f(x)\,g(x)}{c\,d}\leqslant\frac{1}{p}\cdot\frac{f(x)^p}{c^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{g(x)^q}{d^q}$$

On intègre :

$$\frac{1}{c\,d}\int f\,g\,\mathrm{d}\mu\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

D'où le résultat.

Prop (inégalité de Minkowski). Soit $p\in[1,\infty[$, et $f,g\colon E\to[0,\infty]$ $\mathcal{E}$-mesurables. Alors

$$\left(\int_E (f+g)^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_E f^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}+\left(\int_E g^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$$

Preuve. Si $p=1$, c'est une égalité. On suppose $p>1$:

On note q le conjugué de p. $q\,(p-1)=p$.

$\int_E f\,(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu\leqslant\big(\int_E f^p\,\mathrm{d}\mu\big)^{1/p}\big(\int_E (f+g)^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu\big)^{1/q}$

$\int\ g\,(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu\leqslant\big(\int_E g^p\mathrm{d}\mu\big)(\int\ (f+g)^p\,\mathrm{d}\mu)^{1/q}$

On somme les deux inégalités :

$\int_E (f+g)^p\,\mathrm{d}\mu\leqslant\big((\int\ f^p\,\mathrm{d}\mu)^{1/p}+(\int\ g^p\,\mathrm{d}\mu)\big)\,(\int\ (f+g)^p\,\mathrm{d}\mu)^{1/q}$

Cela implique le résultat si $\int_E (f+g)^p\,\mathrm{d}\mu<\infty$.

Si cette intégrale vaut ∞, $x\mapsto x^p$ est convexe car $p>1$. $\big(\frac{1}{2}(f+g)\big)^p\leqslant\frac{1}{2}f^p+\frac{1}{2}g^p$

Donc $(f+g)^p\leqslant 2^{p-1}(f^p+g^p)$

Donc $\int\ f^p\,\mathrm{d}\mu=\infty$ ou $\int\ g^p\,\mathrm{d}\mu=\infty$, et l'inégalité est trivialement vérifiée ($\infty\leqslant\infty$).

2013-10-30

III.2. Les espaces de Banach L^p

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On se donne $f : E \to \mathbb{K}$ $\mathcal{E}$-mesurable.

Soit $p \in [1, \infty[$, on pose :

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

On définit aussi :

$$\|f\|_\infty = \inf \{a \in [0, \infty] : \mu(\{|f| > a\}) = 0\}$$

$\|f\|_\infty$ est le suprémum μ-essentiel de f.

On a donc, si $a > \|f\|_\infty$, alors μ-presque partout $|f| < a$.

Pour tout $p \in [1, \infty]$, on pose :

$$\mathcal{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu) = \{f : E \to \mathbb{K} \text{ } \mathcal{E}\text{-mesurables telles que } \|f\|_p < \infty\}$$

Si $p = 1$, son exposant conjugué est $q = \infty$. Réciproquement si $p = \infty$ son conjugué est $q = 1$.

$\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-presque partout.

On introduit $\mathcal{N}(E, \mathcal{E}, \mu) = \{f : E \to \mathbb{K} \text{ fct } \mathcal{E}\text{-mesurables tq } f = 0 \text{ } \mu\text{-presque partout}\}$

$\mathcal{N}(E, \mathcal{E}, \mu)$ muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par les scalaires : c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On définit la relation :

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g \in \mathcal{N}(E, \mathcal{E}, \mu) \Leftrightarrow f = g \text{ } \mu\text{-presque partout}$$

$\sim$ est une relation d'équivalence (facile à montrer).

On vérifie que $\forall p \in [1, \infty]$, $\mathcal{N}(E, \mathcal{E}, \mu) \subset \mathcal{L}^p$. On définit l'espace quotient

$$L^p(E, \mathcal{E}, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu) / \sim$$

Cet espace est appellé espace L^p associé à $(E, \mathcal{E}, \mu)$.

$L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ hérite de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)$.

$[f] + [g] = [f + g]$ $([f] = [g] \Leftrightarrow f \sim g)$ et $c[f] = [cf]$. $[0]$ est un élément neutre pour $+$ sur L^p.

Si $f \sim g$, alors $\|f\|_p = \|g\|_p$. $\|\cdot\|_p$ est donc définie sur L^p : $\|[f]\|_p = \|f\|_p$

Convention. Un élément $[f] \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ n'est pas une fonction mais un ensemble de fonctions toutes égales μ-presque partout. On confond cependant chaque classe $[f]$ avec n'importe lequel de ses représentants $f \in [f]$.

Prop. On fixe $p \in [1, \infty]$ et on note q son exposant conjugué. Alors :

1. $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ muni de $\|\cdot\|_p$ est un espace vectoriel normé. $\|\cdot\|_p$ est la norme L^p.

2. Si $f \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $g \in L^q(E, \mathcal{E}, \mu)$, alors $fg \in L^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q$

Preuve.

(1) On se donne $[f], [g] \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$, avec pour l'instant $1 \leqslant p < \infty$.

- $\|[f] + [g]\|_p = \|[f+g]\|_p = \|f+g\|_p \overset{\text{Minkowsk}}{\leqslant} \|f\|_p + \|g\|_p = \|[f]\|_p + \|[g]\|_p$
- $\|c\,[f]\|_p = \|[c\,f]\|_p = \|c\,f\|_p = |c|\,\|f\|_p = |c|\,\|[f]\|_p$
- $\|[f]\|_p = 0 \Rightarrow \|f\|_p = 0$, donc $f = 0$ μ-presque partout, donc $[f] = [0]$.

Donc $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$.

Cas $p = \infty$: laissé en exo.

(2) : si $p \in]1, \infty[$, c'est l'inégalité de Hölder.

Cas $p = 1, q = \infty$. μ-presque partout, $|g| \leqslant \|g\|_\infty$, μ-pp $|fg| \leqslant \|g\|_\infty |f|$

$\|fg\| = \int_E |fg| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \|g\|_\infty \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$.

Remarque. En général si $p_1 \leqslant p_2$, il *n'y a pas* de relation simple d'inclusion de $L^{p_1}(E, \mathcal{E}, \mu)$ et de $L^{p_2}(E, \mathcal{E}, \mu)$.

Prop. On suppose μ de masse finie. Soient $p_1, p_2 \in [1, \infty]$ tels que $p_1 \leqslant p_2$. Alors :

$$\forall f \in L^{p_2}(E, \mathcal{E}, \mu), \|f\|_{p_1} \leqslant \mu(E)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|f\|_{p_2} \tag{2}$$

Donc $L^{p_2}(E, \mathcal{E}, \mu) \subset L^{p_1}(E, \mathcal{E}, \mu)$.

Preuve. $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{p_2/p_1}$ est convexe ($x \mapsto x^\theta$ convexe $\Leftrightarrow \theta \geqslant 1$).

Jensen : si $p_1 \leqslant p_2 < \infty$,

$$\frac{1}{\mu(E)} \int (|f|^{p_1})^{p_2/p_1} \, \mathrm{d}\mu \geqslant \left(\frac{1}{\mu(E)} \int |f|^{p_1} \, \mathrm{d}\mu \right)^{p_2/p_1}$$

donc (2).

Si $p_1 < p_2 = \infty$, $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ μ-presque partout. $|f|^{p_1} \leqslant \|f\|_\infty^{p_1}$ μ-pp.

$$\int_E |f|^{p_1} \, \mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_\infty^{p_1} \, \mu(E)$$

donc (2).

Théorème. Soit $p \in [1, \infty]$, on se donne $f_n \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu), n \in \mathbb{N}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_p$. Alors :

1. Il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que :

   $$\forall n, m \geqslant n_k, \|f_n - f_m\|_p \leqslant 2^{-k}$$

   et

   $$\exists f \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu) : f_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} f \text{ } \mu\text{-presque partout}$$

2. $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

   Cela montre notamment que $(L^p(E, \mathcal{E}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est complet (c'est un espace de Banach).

Preuve. $(f_n)_n$ suite de Cauchy signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant n(\varepsilon), \| f_n - f_m \|_p < \varepsilon$$

On pose $n_k = k + \max \{n(2^{-j}) \,; 0 \leqslant j \leqslant k\}$.

On a bien $n_k \leqslant n_{k+1}$ et $\forall n, m \geqslant n_k, \| f_n - f_m \|_p \leqslant 2^{-k}$.

On prouve d'abord le théorème pour $p \in [1, \infty[$:

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k = |f_{n_0}| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}|$. On pose $g = |f_{n_0}| + \sum_{k \geqslant 1} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|$.

$g_k, g : E \to [0, \infty]$ et sont $\mathcal{E}$-mesurables. $g = \lim_{n \to \infty} \uparrow g_k$ ponctuellement.

Par Minkowski, ou l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_p$,

$\forall k \geqslant 0, \| g_k \|_p \leqslant \| f_{n_0} \|_p + \sum_{j=1}^{k} \| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \|_p < 2 + \| f_{n_0} \|_p$

Donc $\int_E g_k^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant (2 + \| f_{n_0} \|_p)^p$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Par convergence monotone, $\int_E g^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k \to \infty} \int_E g_k^p \, \mathrm{d}\mu$

donc $\int_E g^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant (2 + \| f_{n_0} \|_p)^p \Rightarrow 0 \leqslant g < \infty$ μ-presque partout.

Donc $f = f_{n_0} + \sum_{k \geqslant 1} f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$ est bien définie μ-presque partout.

Or $f_{n_0} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} f_{n_j} - f_{n_{j-1}} = f_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} f$ μ-pp, donc (1) est démontré pour $p < \infty$.

Preuve de (2), toujours dans le cas $p < \infty$:

$\forall n, m \geqslant n_k$, $\| f_n - f_m \|_p \leqslant 2^{-k}$. Donc $\forall l \in \mathbb{N}, \| f_{n_{k+l}} - f_n \|_p \leqslant 2^{-k}$

$$\int_E |f_{n_{k+l}} - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant 2^{-pk}$$

On utilise Fatou :

$$\begin{aligned} \int_E |f - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu &= \int_E \liminf_{l \to \infty} |f_{n_{k+l}} - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \liminf_{l \to \infty} \int_E |f_{n_{k+l}} - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant 2^{-pk} \end{aligned}$$

Donc $\forall n \geqslant n_k$, $\| f - f_n \|_p \leqslant 2^{-k}$. Cela implique que $f \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ et que $\| f - f_n \|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Preuve du théorème dans le cas $p = \infty$:

On pose $C = \| f_0 \|_\infty + \sup_{n, m \in \mathbb{N}} \| f_n - f_m \|_\infty < \infty$

On pose $N = \bigcup_{n, m \in \mathbb{N}} \{|f_n| > \| f_n \|_\infty\} \cup \{|f_n - f_m| > \| f_n - f_m \|_\infty\}$

On a $N \in \mathcal{E}$, $\mu(N) = 0$, et

$$\forall x \in E \setminus N, 0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant \| f_n \|_\infty \, \text{et} \, 0 \leqslant |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \| f_n - f_m \|_\infty$$

Donc $\forall x \in E \setminus N$, $\left(f_n^{(x)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existe.

On étend f à E en posant $f(x) = 0$ si $x \in N$.

$0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant C$, donc $0 \leqslant |f(x)| \leqslant C$ $\forall x \in E$.

$\| f \|_\infty \leqslant C < \infty$, $f \in L^\infty(E, \mathcal{E}, \mu)$.

$0 \leqslant |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty$

$0 \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{m \geqslant n} \|f_n - f_m\|_\infty$

$\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \sup_{m \geqslant n} \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} f,\ f \in L^\infty,\ f_n \to f$ μ-presque partout. $\square$

Exemple. Soit $p \in [1, \infty[$.

$$l^p(\mathbb{N}) = \left\{ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|u\|_p = \left(\sum_{n \geqslant 0} |u_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

$$l^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < \infty \right\}$$

$l^p(\mathbb{N}) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ car $\int_{\mathbb{N}} u \, \mathrm{d}\# = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Exemple. Le passage au quotient de $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ vers $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ dépend énormément de μ. En effet, si $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mu = \delta_0$. Alors $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}\}$ est de dimension infinie. $f = g$ δ_0-presque partout ssi $f(0) = g(0)$. Donc $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta_0)$ est de dimension 1 (isométrique à $\mathbb{R}$).

Résultats de densité.

On note $S(E)$ l'ensemble des fonctions étagées à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit $A \in \mathcal{E}$, alors $\mathbf{1}_A \in L^\infty(E, \mathcal{E}, \mu)$.

Si $p \in [1, \infty[$, alors $\mathbf{1}_A \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu) \Leftrightarrow \mu(A) < \infty$ et $\|\mathbf{1}_A\|_p = \mu(A)^{1/p}$

Si $f \in S(E)$, alors elle peut s'écrire $f = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k \mathbf{1}_{A_k}$, avec les A_k éléments de $\mathcal{E}$ disjoints deux à deux. On a alors :

- $f \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ $(p < \infty) \Leftrightarrow \mu(A_1) < \infty \wedge \cdots \wedge \mu(A_n) < \infty$. On a alors :

$$\|f\|_p \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mu(A_k)^{1/p}$$

- $f \in L^\infty(E, \mathcal{E}, \mu)$.

Prop. $\forall p \in [1, \infty]$, $S(E) \cap L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ est dense dans $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$.

Preuve.

Cas $p < \infty$:

$f : E \to \mathbb{R}_+$ dans L^p. Il existe $s_n \in S(E), n \in \mathbb{N}$ telles que $0 \leqslant s_n \leqslant s_{n+1}$ et $f = \lim_{n \to \infty} \uparrow s_n$.

On a donc $s_n \in S(E) \cap L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$.

$0 \leqslant f - s_n \leqslant f$; $0 \leqslant (f - s_n)^p \leqslant f^p$.

Par convergence dominée (car $\int_E f^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$), $\lim_{n \to \infty} \int_E (f - s_n)^p \, \mathrm{d}\mu = 0$

$\lim_{n \to \infty} \|f - s_n\|_p = 0$.

Soit $f : E \to \mathbb{C}$ dans $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$. On écrit $f = \underbrace{(\Re f)_+}_{f_1} - \underbrace{(\Re f)_-}_{f_2} + i \underbrace{(\Im f)_+}_{f_3} - i \underbrace{(\Im f)_-}_{f_4}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists s_1, s_2, s_3, s_4 \in S(E) \cap L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ telles que $\|f_i - s_i\|_p < \varepsilon / 4$

$\Rightarrow \|f - (s_1 - s_2 + i\, s_3 - i\, s_4)\|_p < \varepsilon$.

$p = \infty$: encore plus facile :

$f: E \to \mathbb{R}_+,\ f \leqslant \|f\|_\infty$ μ-presque partout

$s_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \lfloor 2^n \|f\|_\infty \rfloor} k\, 2^{-n} \mathbf{1}_{\{k 2^{-n} \leqslant f \leqslant (k+1) 2^{-n}\}}$

$0 \leqslant s_n \leqslant \|f\|_\infty$; $s_n \leqslant s_{n+1}$ et $\|f - s_n\|_\infty \leqslant 2^{-n}$. $\square$

Théorème. Soit $p \in [1, \infty[$. Soit (E, d) un espace métrique. Soit $\mu: \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ une mesure positive.

1. Si μ est régulière extérieurement pour les ouverts, alors $\mathrm{Lip}_b(E) \cap L^p(E, \mathcal{B}(E), \mu)$ est dense dans $L^p(E, \mathcal{B}(E), \mu)$.

2. On suppose (E, d) localement compact séparable, et $\mu: \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ une mesure de Radon. Alors : $\mathrm{Lip}_c(E) \cap L^p(E, \mathcal{B}(E), \mu)$ (ensemble des fonctions lipschitziennes à support compact) est dense dans $L^p(E, \mathcal{B}(E), \mu)$.

Idée de preuve. $\mathbf{1}_A$ avec $\mu(A) < \infty$ est approchable arbitrairement près en norme $\|\cdot\|_p$ par des fonctions de $\mathrm{Lip}_b(E) \cap L^p(E, \mathcal{B}(E), \mu)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists U \text{ ouvert} : A \subset U \wedge \|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_U\| = \mu(U \setminus A)^{1/p} \leqslant \varepsilon$

$\phi_k(x) = 1 \wedge (k\, d(x, E \setminus U)),\ \phi_k \in \mathrm{Lip}_b(E)$

$$\begin{cases} 0 \leqslant \phi_k \leqslant \phi_{k+1} \leqslant 1 \\ \lim_{k \to \infty} \phi_k = \mathbf{1}_U \text{ ponctuellement} \end{cases}$$

$0 \leqslant \mathbf{1}_U - \phi_k \leqslant \mathbf{1}_U$.

$\|\mathbf{1}_U - \phi_k\|_p \leqslant \|\mathbf{1}_U\| = \mu(U)^{1/p} < \infty$

$0 \leqslant (\mathbf{1}_U - \phi_k)^p \leqslant \mathbf{1}_U$.

Par convergence dominée, $\|\mathbf{1}_U - \phi_k\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$\exists \phi \in \mathrm{Lip}_b(E) \cap L^p(E, \mathcal{B}(E), \mu)$ telle que $\|\mathbf{1}_U - \phi\|_p < \varepsilon$, donc $\|1_A - \phi\|_p < 2\,\varepsilon$.

Théorème. On suppose que $\mathcal{E}$ est engendré par une classe dénombrable d'ensembles. Si $p \in [1, \infty[$, $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ est séparable.

Preuve. Plus tard.

Remarque. $L^\infty(E, \mathcal{E}, \mu)$ n'est en général pas séparable. Par exemple, $l^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable. En effet, soit $J \subset \mathbb{N}$. $\mathbf{1}_J \in L^\infty(\mathbb{N})$. $\forall J, J' \subset \mathbb{N}$, $J \neq J'$, on a $\|\mathbf{1}_J - \mathbf{1}_{J'}\|_\infty = 1$. Donc $\forall J, J' \subset \mathbb{N}$, $J \neq J'$, $\mathcal{B}(\mathbf{1}_J, 1/2) \cap \mathcal{B}(\mathbf{1}_{J'}, 1/2) = \varnothing$. Supposons que $l^\infty(\mathbb{N})$ est séparable. Chaque boule $\mathcal{B}(\mathbf{1}_J, 1/2)$, $J \subset \mathbb{N}$ devrait contenir un élément d'une suite dense. On aurait alors une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\{\mathcal{B}(\mathbf{1}_J, 1/2), J \subset \mathbb{N}\}$, ce dernier ensemble étant en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, c'est absurde.

2013-11-04, Igor Kortchemsky

Changement d'horaires :

- cours le lundi 18/11 de 8h30 à 12h15 (salles à préciser)
- Pas de TD le jeudi 21/11
- Partiel le lundi 25/11
- TD le jeudi 28/11

III.3. Espaces $\mathcal{L}^2$

Ici $(E, \mathcal{E}, \mu)$ est un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.3.1.Espaces de Hilbert

Déf. Soit H un $\mathbb{K}$-ev. Un *produit scalaire* sur H est une application $H \times H \to \mathbb{K}$, souvent noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tel que :

1. $\forall (x, y) \in H, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
2. $\forall (x, y, z) \in H, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \langle x + \lambda\, y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$
3. $\forall x \in H, \langle x, x \rangle > 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Remarque. $\forall x \in H, \langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$; $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda}\, \langle x, y \rangle$

Notation. Pour $x \in H$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. On verra que c'est bien une norme.

Propriétés. Identités de polarisation :

- $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + i\, y\|^2 - i\|x - i\, y\|^2)$

Prop. Soit H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur H. Alors :

1. Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in H, |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\, \|y\|$$

2. Inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in H, \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

3. $\|\cdot\|$ est bien une norme
4. Identité du parallélogramme : dans un parallélogramme de côtés x et y (donc de diagonales $x + y$ et $x - y$), on a :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Preuve.

1. On suppose $y \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et tq $\lambda \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$

   On considère

$$\begin{aligned}
P(r) &= \|x - \lambda\, r\, y\|^2 \\
&= \langle x - \lambda\, r\, y, x - \lambda\, r\, y \rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda\, r\, \langle x, y \rangle) + \lambda^2 r^2 \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\, r\, |\langle x, y \rangle|^2 + \underbrace{\lambda^2}_{=1} r^2\, \|y\|^2 \\
&= \left(r\|y\| - \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|y\|} \right)^2 + \|x^2\| - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}
\end{aligned}$$

Comme $P(r) \geqslant 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|} \geqslant 0$, d'où Cauchy-Shwarz

2.

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \|x^2\| + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leqslant \|x^2\| + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}
$$

3. Inégalité triangulaire : ok.

   si $\|x\| = 0, x = 0$ ok.

   $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\bar{\lambda}\,\|x\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2$, donc $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

4. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$

   $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$

   On fait ensuite la somme. □

Prop. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-ev normé. Il existe $\langle\cdot,\cdot\rangle$ produit scalaire tel que $\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$ ssi $\|\cdot\|$ vérifie l'inégalité du parallélogramme (thm de Fréchet-Jordan-Von Neuman).

Déf. Soit H un $\mathbb{K}$-ev muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On dit que c'est un *espace de Hilbert* s'il est complet pour la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire.

Si $\dim H < \infty$, H est nécessairement complet. Dans ce cas, on dit que H est *hermitien*.

Ex. Si $n \geqslant 1$, on munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_i\,\bar{y_i}$$

avec $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$. Ceci fait de $\mathbb{C}^n$ un espace hermitien.

Ex. $\mathcal{L}^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int f\bar{g}\;\mathrm{d}\mu$$

Ex. Les espaces de Sobolev (utiles en analyse fonctionnelle).

Application. En mécanique quantique.

III.3.2. Projections orthogonales

Rappel. H $\mathbb{K}$-ev. $C \subset H$ est convexe si $\forall x, y \in C, \forall t \in [0,1], t\,x + (1-t)\,y \in C$.

Théorème : projection orthogonale sur un convexe fermé. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et $C \subset H$ un convexe <u>fermé</u>, alors :

$$\exists! x_0 \in C : \|x_0\| = \inf_{x \in C} \|x\|$$

Idée de preuve. Si $x, y \in C$, alors $\frac{x+y}{2} \in C$. Cela permet de prouver directement l'unicité (utiliser l'identité du parallelogramme).

Preuve.

Unicté. Si $\|x\| = \|y\| = \inf_{z \in C} \|z\| = r$, avec $x, y \in C$, alors

$$\underbrace{2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)}_{=2(r^2+r^2)} = \underbrace{4\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2}_{\geqslant 4r^2} + \|x-y\|^2$$

On en déduit $\|x-y\| \leqslant 0$, donc $x = y$.

Existence. Soit $(y_n) \in C^n$ tel que $\|y_n\| \to r = \inf_{z \in C} \|z\|$. On va mq $(y_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy :

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) - 4\left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 2\,(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) - 4\,r^2 \end{aligned}$$

Comme $\|y_n\| \to r$, (y_n) est une suite de Cauchy.

Par complétude, $\exists x_0$ tel que $y_n \to x_0$. Comme C est fermé, $x_0 \in C$. Par continuité de la norme, on a $\|y_n\| \to \|x_0\|$, donc $\|x_0\| = r$. $\square$

Lemme. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. Alors $\forall x \in H$, $\begin{array}{rcl} H & \to & K \\ y & \mapsto & \langle y, x\rangle \end{array}$ est une forme linéaire continue.

Preuve. Elle est bien linéaire.

Par Cauchy-Shwarz, on a bien $|\langle y, x\rangle| \leqslant \|y\|\,\|x\|$. $\square$

Déf. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert.

1. Si $x, y \in H$ on dit que x est *orthogonal* à y si $\langle x, y\rangle = 0$.

2. Si $A \subset H$, on note $A^\perp = \{y \in H : \forall x \in A, \langle x, y\rangle = 0\}$

Rmq. $A^\perp$ est toujours fermé. En effet, $A^\perp = \bigcap_{y \in A} \{x\}^\perp$, et $\{x\}^\perp = \{y \in H : \langle y, x\rangle = 0\}$ qui est le noyau de la forme linéaire continue $y \mapsto \langle x, y\rangle$, donc fermé.

Théorème : projection sur un SEV fermé. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, soit $F \subset H$ un sous-espace vectoriel <u>fermé</u>. Alors :

1. $\forall x \in H, \exists!\, p_F(x) \in F : \|x - p_F(x)\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

2. $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$

3. $x \mapsto p_F(x)$ est linéaire, continue, et $p_F(x) = x \Leftrightarrow x \in F$.

Preuve.

1. On pose $C = x + F = \{x - y ; y \in F\}$.

   D'après le théorème précédent, $\exists!\, x_0 \in C$ tel que $\|x_0\| = \inf_{z \in C} \|z\|$.

   On pose alors $p_F(x) = x - x_0$. On a bien $\|x - p_F(x)\| = \|x_0\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Cela montre également $p_F(x) \in F$, ainsi que l'unicité.

2. Soit $y \in F$, $y \neq 0$. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \|x_0\|^2 &\leqslant \|x_0 - \lambda\, y\|^2 \\ &= \|x_0\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda \langle x_0, y\rangle) + |\lambda|^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

On choisit $\lambda = \frac{\langle x_0, y\rangle}{\|y\|^2}$. Alors :

$$\|x_0\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 - 2\frac{|\langle x_0, y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x_0, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

Donc $\frac{|\langle x_0, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \leqslant 0$, donc $\langle x_0, y\rangle = 0$ $\forall y \in F$, or $x_0 = x - p_F(x)$, donc $x - p_F(x) \in F^\perp$.

On écrit $\|x\|^2 = \left\| \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} \right\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$ $(*)$ (Pythagore...)

3. p_F est linéaire car $H = F \oplus F^\perp$. En effet, on a vu que $F + F^\perp = H$, et $F \cap F^\perp = \{0\}$.

   D'après $(*)$, $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$, donc p_F est continue.

   Il est clair que $p_F(x) = x \Leftrightarrow x \in F$. □

Applications.

- Théorèmes de Hahn-Banach
- Existence de bases hilbertiennes
- Théorème de Riesz-Fréchet.

Remarque. Si $F \subset H$ est de dimension finie, le théorème s'applique. En effet, F est alors complet, et donc fermé dans H.

Remarque. L'hypothèse F fermé est essentielle. Par exemple, si $F = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ polynomiale}\}$ et $H = \mathcal{L}^2([0, 1], \mathrm{d}x)$. Par densité des fonctions continues sur $[0, 1]$ dans H et par densité de F dans $C^0([0,1], \|\cdot\|_\infty)$, il existe une suite de fonctions polynomiales $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telles que par exemple $\|f_n - \sin\|_2 \xrightarrow[n\infty]{} 0$: il n'y a donc pas de projection orthogonale.

Déf. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. On note H' l'ensemble des formes linéaires continues sur H muni de la norme $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| ; \|x\| \leqslant 1\}$ pour $\varphi \in H'$. On appelle H' le *dual topologique* de H (topologique : on ne s'intéresse qu'aux formes linéaires continues).

Exo. Montrer que H' est un espace de Banach, ie que toutes suite de Cauchy converge.

Théorème de Riesz-Fréchet. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert.

1. $\forall \varphi \in H'$, il exite $y_\varphi \in H$ tel que $\forall x \in H, \varphi(x) = \langle x, y_\varphi\rangle$.

   De plus $\|\varphi\| = \|y_\varphi\|$.

   De plus y_φ est unique.

2. L'application $\begin{array}{ccc} H' & \to & H \\ \varphi & \mapsto & y_\varphi \end{array}$ est une isométrie linéaire bijective.

Preuve.

1. **Unicité.** Si il existe $y, z \in H$ tels que $\varphi(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ $\forall x \in H$, alors $\|y - z\|^2 = \langle y - z, y - z\rangle = \langle y, y\rangle + \langle z, z\rangle - \langle y, z\rangle - \langle z, y\rangle = \varphi(y) + \varphi(z) - \varphi(y) - \varphi(z) = 0$, donc $y = z$.

   Existence. Supposons $\varphi \neq 0$. Soit $F = \ker\varphi = \{x \in H : \varphi(x) = 0\}$. F est un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit $y \notin F$. Soit $z = p_{F^\perp}(y)$, et $z_0 = \frac{z}{\|z\|}$ ($z \neq 0$ car $y \notin F$).

Soit $x \in H$, $\varphi(\varphi(z_0)\, x - \varphi(x)\, z_0) = 0$ car φ est une forme linéaire, donc $\varphi(z_0)\, x - \varphi(x)\, z_0 \in F$, or $z_0 \in F^{\perp}$ donc $\langle \varphi(z_0)\, x - \varphi(x)\, z_0, z_0 \rangle = 0$. Donc $\langle x, \overline{\varphi(z_0)}\, z_0 \rangle = \varphi(x)\, \langle z_0, z_0 \rangle = \varphi(x)$.

On prend donc $y_\varphi = \overline{\varphi(z_0)}\, z_0$.

Si $\varphi(x) = \langle x, y_\varphi \rangle$, alors par Cauchy-Shwarz, $|\varphi(x)| \leqslant \|x\|\, \|y_\varphi\| \leqslant \|y_\varphi\|$ si $\|x\| \leqslant 1$.

Donc $\|\varphi\| \leqslant \|y_\varphi\|$. Or $\left|\varphi\!\left(\frac{y_\varphi}{\|y_\varphi\|}\right)\right| = \frac{\langle y_\varphi, y_\varphi \rangle}{\|y_\varphi\|} = \|y_\varphi\|$ et $\left\|\frac{y_\varphi}{\|y_\varphi\|}\right\| = 1$, donc $\|\varphi\| \geqslant \|y_\varphi\|$.

On a donc $\|\varphi\| = \|y_\varphi\|$. □

2. Ok.

Ce résultat permet d'identifier un espace de Hilbert à son dual topologique.

Applications.

- Théorème de Radon-Nikodym
- Définition de l'espérance conditionnelle
- Dualité L^p-L^q.
- Théorème de Lax-Milgram (analyse fonctionnelle)

Déf. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $(e_j)_{j \in J}$ une famille de vecteurs de H.

1. On dit que $(e_j)_{j \in J}$ est une famille orthogonale si $\forall j \in J, e_j \neq 0$ et $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.
2. On dit que $(e_j)_{j \in J}$ est une famille orthonormale si elle est orthogonale et que $\forall j \in J, \|e_j\| = 1$.
3. On dit que $(e_j)_{j \in J}$ est une base orthonormale complète (ou *base hilbertienne*) si $(e_j)_{j \in J}$ est une famille orthonormale et $\mathrm{vect}(e_j, j \in J)$ est dense dans H.

Attention. Une base hilbertienne n'est pas forcément une base au sens algébrique.

Lemme. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, et $A \subset H$. Alors $\overline{\mathrm{vect}(A)} = H$ ssi $A^{\perp} = \{0\}$.

Preuve. Sens $\Rightarrow$: Soit $x \in A^{\perp}$, mq $x = 0$: $\forall e \in A$, $\langle x, e \rangle = 0$, donc $\forall e \in \mathrm{vect}(A)$, $\langle x, e \rangle = 0$. Or il existe une suite $e_n \in \mathrm{vect}(A)$ telle que $e_n \to x$. Or par continuité de $\langle \cdot, x \rangle$, $\langle e_n, x \rangle \to \langle x, x \rangle$, donc $\langle x, x \rangle = 0$, donc $x = 0$.

Sens $\Leftarrow$: par contraposée. Si $F = \overline{\mathrm{vect}(A)} \neq H$, soit $x \in H \setminus F$, on a que $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ (F est un sev fermé). Or $F^{\perp} \subset A^{\perp}$, donc $\forall e \in A, \langle x - p_F(x), e \rangle = 0$. De plus $x - p_F(x) \neq 0$ car $x \notin F$, donc $A^{\perp} \neq \{0\}$. □

2013-11-06, I.Kortchmsky

Lundi 18/11 : cours à 8h30 en amphi Rataud.

III.3.3. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille libre de H.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

1. On pose $a_1 = \|x_1\|$, et $e_1 = \frac{x_1}{a_1}$

2. Si on a construit $(a_i, e_i)_{1\leqslant i\leqslant j}$, $j<n$, on pose

$$a_{j+1}=\left\| x_{j+1}-\sum_{i=1}^{j} \langle x_{j+1}, e_i\rangle\, e_i \right\|$$

$$e_{j+1}=\frac{1}{a_{j+1}}\left(x_{j+1}-\sum_{i=1}^{j} \langle x_{j+1}, e_i\rangle \right) e_i$$

Prop (en exo). La famille $(e_i)_{1\leqslant i<n}$ est orthonormale, et $\mathrm{vect}(e_i, 1\leqslant i\leqslant n)=\mathrm{vect}(x_i, 1\leqslant i\leqslant n)$.

Interprétation. Si on pose $F_j=\mathrm{vect}(x_1, ..., x_j)$, $a_{j+1}=d(x_{j+1}, F_j)$ et $p_{F_j}(x_{j+1})=\sum_{i=1}^{j} \langle x_{j+1}, e_i\rangle\, e_i$

Notation. Pour $j\geqslant 1$, on note M_j la *matrice de Gram* :

$$M_j=(\ \langle x_i, x_k\rangle\ )_{1\leqslant i,k\leqslant j}$$

Comme (x_j) est libre, on vérifie que $\det M_j\neq 0$. On peut aussi montrer que $a_{j+1}^2=\frac{\det M_{j+1}}{\det M_j}$.

Application. Tont espace de Hilbert H séparable et de dimension infinie admet une base hilbertienne.

Preuve. Soit $(x_i)_{i\geqslant 1}$ une suite dense dans H.

Pour $k\geqslant 1$, on note $N_k=\min\{i\geqslant 1\colon \dim(\mathrm{vect}(x_1, ..., x_i))=k\}$. On vérifie que N_k est bein définie : si $F=\mathrm{vect}(x_i, i\geqslant 1)<\infty$, alors F est de dimension finie et fermé dans H, donc H est de dimension finie car F est dense dans H, absurde.

On vérifie que si on pose $y_k=x_{N_k}$, alors $\mathrm{vect}(y_k, k\geqslant 1)=\mathrm{vect}(x_k, k\geqslant 1)$ et que $(y_k)_{k\geqslant 1}$ est une famille libre.

On note $(e_n)_{n\geqslant 1}$ la famille obtenue à partir de $(y_j)_{j\geqslant 1}$ par procédé d'orthonormalisation de Gram-Shmidt, ce qui donne la base hilbertienne voulue. ☐

Théorème (Riesz-Fischer). Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Soit (e_n) une base hilbertienne de H. Pour $x\in H$, on pose $c_n(x)=\langle x, e_n\rangle, n\geqslant 1$. Alors :

1. $\lim_{N\to\infty}\left\| x-\sum_{n=1}^{N} c_n(x)\, e_n\right\|=0$, ce que l'on note dans H :

$$x\ =\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\, e_n$$

2. On a

$$\begin{aligned} \|x\|^2\ &=\ \sum_{k\geqslant 1} |c_k(x)|^2\\ \text{si } x, y\in H,\ \langle x, y\rangle\ &=\ \sum_{k\geqslant 1} c_k(x)\,\overline{c_k(y)} \end{aligned}$$

Preuve.

1. On introduit $F_N=\mathrm{vect}(e_1, ..., e_N)$.

   On a vu que $\forall x\in H, \|x\|^2=\|x-p_{F_N}(x)\|^2-\|p_{F_N}(x)\|^2$ $(*)$ avec $p_{F_N}(x)=\sum_{k=1}^{N} c_k(x)\, e_k$.

   Or $(*)$ montre que $\|x-p_{F_N}(x)\|$ est décroissante.

Soit $(y_k)_{k\geqslant 1}$ des éléments de $\mathrm{vect}(e_i, i\geqslant 1)$ tels que $\|y_k - x\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Il existe une suite strictement croissante (N_k) telle que $y_k \in F_{N_K}$. Or $\left\|x - p_{F_{N_k}}(x)\right\| \leqslant \|x - y_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. On a donc que $\|x - p_{F_N}(x)\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, car c'est une suite décroissante dont une sous-suite tend vers 0.

2. On utilise le fait que $\langle\cdot, y\rangle$ est continue. Ainsi,

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left\langle \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} c_k(x)\, e_k, y \right\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} c_k(x)\, \langle e_k, y\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} c_k(x)\, \overline{c_k(y)}\end{aligned}$$

L'autre égalité s'obtient en prenant $x = y$. $\square$

Remarque. $\begin{array}{rcl} H & \to & l^2(\mathbb{N}) \\ x & \to & (c_{n+1}(x))_{n\geqslant 0} \end{array}$ est un isomorphisme isométrique (une isométrie).

III.3.4. Séries de Fourier

Ici on travaille sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{d}x)$ ($\mathrm{d}x = l$ est la mesure de Lebesgue).

On note $L^p = L^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{d}x)$, avec $p \in [1,\infty]$

III.3.4.a. Dans L^2

Notations.

- $\begin{array}{rccc} e_k: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & e^{2ik\pi t} \end{array}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{P} = \mathrm{vect}(e_k, k\in\mathbb{Z})$ est l'ensemble des polynomes trigonométriques
- $C^k_{\mathrm{per}} = \{f : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ avec $f\in C^k$ et f 1-périodique$\}$
- $C^\infty_{\mathrm{per}} = \{f : \mathbb{R}\to\mathbb{C},\ f$ 1-périodique et $C^\infty\}$
- $C^0_{\mathrm{per}} = \{f : \mathbb{R}\to\mathbb{C},\ f$ 1-périodique et continue$\}$

Remarque.

- $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$ pour f mesurable.
- $\mathbb{P} \subset C^\infty_{\mathrm{per}} \subset C^k_{\mathrm{per}} \subset C^0_{\mathrm{per}} \subset L^\infty \subset L^p \subset L^1$

Notation. Pour $f \in L^1$ et $n\in\mathbb{Z}$, on note $c_n(f) = \int_{[0,1]} f(t)\, e^{-2i\pi n t}\,\mathrm{d}t$.

Remarque. Si f est à valeurs réelles, $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.

Rappel (lemme de Riemann-Lebesgue). Si $f\in L^1$, alors $c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$.

On note $F_N = \mathrm{vect}(e_k, |k|\leqslant n)$, et on note p_{F_N} la projection orthogonale sur F_N, ie. pour $f\in L^2$:

$$p_{F_N}(f) = \sum_{|k|\leqslant N} c_n(f)\, e_k$$

Par abus de notation, on garde cette notation pour $f \in L^1$ (cela ne s'interprète comme une projection orthogonale que dans L^2).

Prop.

- $\|e_k\|_p = 1$
- $|c_n(f)| \leqslant \|f\|_p$ pour $f \in L^p$
- $p_{F_N} : L^p \to L^p$ est continue linéaire.

Preuve. (1) ok, (2) ok (inégalité de Hölder).

(3) Ok par Minkowski : $\|p_{F_N}(f)\|_p \leqslant (2N+1)\,\|f\|_p$. □

Définition. Pour $f \in L^1$ et $N \geqslant 0$, on note :

$$\Phi_n(f) \;=\; \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} p_{F_k}$$

Prop. $\Phi_n : L^p \to L^p$ est continue.

Preuve. Ok par Minkowski et par ce qui précède. □

Déf. Pour $N \geqslant 0$, on note :

$$D_N(t) = \sum_{|k| \leqslant N} e^{2i\pi kt} = \frac{\sin(\pi\,(2N+1)\,t)}{\sin(\pi\,t)}$$

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{|j| \leqslant k} e^{2i\pi jt} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\pi\,(N+1)\,t)}{\sin(\pi\,t)}\right)^2$$

D_N est appellé *noyau de Dirichlet* et K_N est appellé *noyau de Féjer*.

Prop. Si $f \in L^1$ et f est 1-périodique, alors :

$$p_{F_N}(f) = \int_{[0,1]} f(t-u)\,D_N(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\Phi_N(f)(t) = \int_{[0,1]} f(t-u)\,K_N(-u)\,\mathrm{d}u \qquad (*)$$

Preuve. En exo.

Lemme utile.

1. $K_N \geqslant 0$ et $\int_{[0,1]} K_N = 1$
2. Si $g : \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable bornée continue en 0, alors

$$\int_{\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]} g(u)\,K_N(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[N\to\infty]{} g(0)$$

Preuve (idée).

1. $K_N \geqslant 0$ ok. $\int_{[0,1]} K_N = 1$ découle de $(*)$ avec $f = \mathbf{1}$ (fonction constante égale à 1) et du fait que $p_{F_N}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

2. On écrit :

$$\left|\int_{\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]} g(u)\,K_N(u)\,\mathrm{d}u - g(0)\right| \leqslant \int_{\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]} |g(u)-g(0)|\,K_N(u)\,\mathrm{d}u$$

Après on découpe en deux et on contrôle ce qui se passe (en exo). □

Théorème (Féjer). Soit $f \in C^0_{\mathrm{per}}$. Alors :

$$\|f-\Phi_N(f)\|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Corollaire. $\mathbb{P}$ est dense dans $(C^0_{\mathrm{per}}, \|\cdot\|_\infty)$

Preuve.

$$|f(t)-\Phi_N(f)(t)| \overset{\text{par }(*)}{\leqslant} \int_{\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]} |f(t)-f(t-u)|\,K_N(u)\,\mathrm{d}u$$

Or f est uniformément continue. On pose $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(s)-f(t)|\,;\,|s-t|\leqslant\delta\}$. Ainsi ω_f est bornée, continue en 0 et $\omega_f(0)=0$. Le théorème de Féjer découle alors du (2) du lemme utile. □

Théorème. La famille $(e_k, k\in\mathbb{Z})$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$. De plus,

1. Si $f\in L^2([0,1])$, alors $\left\|f-\sum_{|k|\leqslant N} c_k(f)\,e_k\right\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ce que l'on note :

$$f = \sum_{|k|\leqslant N} c_k(f)\,e_k \quad \text{dans } L^2$$

2. Si $f,g\in L^2([0,1])$,

$$\int f\bar{g} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\,\overline{c_k(g)}$$

   En particulier, $\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$.

Preuve. Par Féjer, $\mathbb{P}$ est dense dans $(C^0_{\mathrm{per}}, \|\cdot\|_\infty)$, donc dans $(C^0_{\mathrm{per}}, \|\cdot\|_2)$ car $\|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_\infty$.

Or C^0_{per} est dense dans $L^2([0,1])$, donc $\mathbb{P}$ est dense dans $L^2([0,1])$.

Comme $(e_k, k\in\mathbb{Z})$ est une famille orthonormée, c'est bien une base Hilbertienne.

(1) et (2) sont des conséquences de Riesz-Fischer. □

III.3.4.b. Fonctions plus régulières

On peut avoir des convergences plus fortes que dans L^p.

Prop.

1. Si $f\in C^k_{\mathrm{per}}$, $c_n\big(f^{(k)}\big) = (2\,i\,\pi\,n)^k\,c_n(f)$.

2. Si $f\in C^1_{\mathrm{per}}$, alors $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)| < \infty$ et on a $\left\|f-\sum_{|k|\leqslant N} c_k(f)\,e_k\right\|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$,
   c'est-à-dire que $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\,e_k$

3. $f\in C^\infty_{\mathrm{per}} \Leftrightarrow \forall p\geqslant 1, n^p|c_n(f)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Preuve (idée).

1. Par IPP

2.

$$\begin{array}{lcl}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)| & \leqslant & |c_0(f)| + 2\sum_{k\geqslant 1} \frac{|c_k(f')|}{2\,\pi\,k} \\ & \overset{\text{Cauchy-Shwarz}}{\leqslant} & |c_0(f)| + \frac{1}{\pi}\sqrt{\sum_{k\geqslant n} \frac{1}{k^2}}\,\sqrt{\sum_{k\geqslant 1} |c_k(f')|^2}\end{array}$$

Or $\sum_{k\geqslant 1} |c_k(f')|^2 \leqslant \|f'\|_2^2 < \infty$

Ensuite, on voit que f et $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\,e_k$ ont les mêmes coefficients de Fourier. Comme (e_k) est une base orthonormale de L^2 :

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\,e_k \text{ dans } L^2\text{, donc presque-partout}$$

Or f et les e_k sont continues, donc la convergence a lieu partout.

3. Conséquence du lemme de Riemann-Lebesgue. □

III.3.4.c. Fonctions moins régulières

Quel sens donner à $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\,e_k$? Dans quel espace ? Lien avec f ?

Théorème (Dirichlet). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable 1-périodique telle que $\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, on suppose que la limite à droite en t_0 de f existe, on la note $f(t_0^+)$. On suppose que la limite à gauche en t_0 de f existe, et on la note $f(t_0^-)$.

On suppose que $\int_{[0,1]} \left|\frac{f(t_0+t) - f(t_0^+)}{t}\right| \mathrm{d}t < \infty$ et $\int_{[0,1]} \left|\frac{f(t_0-t) - f(t_0^-)}{t}\right| \mathrm{d}t < \infty$. Alors :

$$\sum_{|k|\leqslant N} c_k(f)\,e_k(t_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}\,(f(t_0^+) + f(t_0^-))$$

Preuve. On écrit $p_{F_N}(f)(t_0) = \int_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} (f(t_0+t) - f(t_0-t))\,D_N(t)\,\mathrm{d}t$.

On retranche $\frac{1}{2}(f(t_0^+) + f(t_0^-))$, on les rentre sous l'intégrale, on utilise Riemann-Lebesgue. □

2013-11-13, T.Duquesne

IV. Mesures complexes et théorème de Radon-Nikodyn

IV.1. Mesures complexes

Déf. On se donne $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable. L'application $\mu\colon \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ est une *mesure complexe* si pour tous $A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ deux-à-deux disjoints, la série de terme général $(\mu(A_n))_n$ converge et si $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Lorsque μ est à valeurs réelles, μ est appellée *mesure signée*.

Prop.

a) $\mu(\varnothing)=0$

b) Si $A,B\in\mathcal{E}$ sont disjoints, $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$

$\forall A\in\mathcal{E}$, $\mu(E\backslash A)=\mu(E)-\mu(A)$.

c) $\mu:\mathcal{E}\to\mathbb{C}$ une mesure complexe. On pose $\nu(A)=\mathrm{Re}(\mu(A))$ et $\pi(A)=\mathrm{Im}(\mu(A))$ pour $A\in\mathcal{E}$. Alors ν et π sont des mesures signées.

Déf. Soi $a_n\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}$. La série de terme général $(a_n)_n$ est *commutativement convergente* si pour toute bijection $\gamma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, la série de terme général $(a_{\gamma(n)})_n$ est convergente, et si on a

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\gamma(n)} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

Prop. (a_n) commutativement convergente $\Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 0}|a_n|<\infty$.

Lemme. Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable et $\mu:\mathcal{E}\to\mathbb{C}$ une mesure complexe. Alors $\forall A_n\in\mathcal{E}, n\in\mathbb{N}$, deux à deux disjoints, la série de terme général $\mu(A_n)$ est absolument convergente :

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|\mu(A_n)|<\infty$$

Déf. Soit $\mu:\mathcal{E}\to\mathbb{C}$ une mesure complexe. $\forall A\in\mathcal{E}$, on pose

$$|\mu|(A) \;=\; \sup\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}|\mu(A_n)|\,;(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ partition de } A\right\}$$

$|\mu|:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ est appellée *variation totale* de μ.

On a : $|\mu|(A)\geqslant|\mu(A)|$. En général l'inégalité est stricte.

Théorème. Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré complexe. Alors $|\mu|:\mathcal{E}\to\mathbb{R}_+$ est une mesure positive finie.

Preuve. Soit $B_n\in\mathcal{E}, n\geqslant 0$ deux à deux disjoints. On pose $B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\in\mathcal{E}$.

Soit $C_p\in\mathcal{E}, p\in\mathbb{N}$ une partition de B. Donc $C_p\cap B_n, n\in\mathbb{N}$ est une partition de C_p.

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathbb{N}}|\mu(C_p)| &= \sum_{p\in\mathbb{N}}\left|\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(C_p\cap B_n)\right|\\ &\leqslant \sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}}|\mu(C_p\cap B_n)|\\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{p\in\mathbb{N}}|\mu(C_p\cap B_n)|\\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}|\mu|(B_n)\end{aligned}$$

En prenant le suprémum sur les $C_p\in\mathcal{E}$, $p\in\mathbb{N}$ qui partitionnent B, on a que $|\mu|(B)\leqslant\sum_{n\in\mathbb{N}}|\mu|(B_n)$ $(*)$. Ceci est vrai $\forall B_n\in\mathcal{E}, n\in\mathbb{N}$ deux à deux disjoints et $B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n$.

On veut montrer que $|\mu|(B)<\infty, \forall B\in\mathcal{E}$. On suppose d'abord que μ est une mesure signée (ie. elle est à valeurs réelles). On montre d'abord que : $\forall B\in\mathcal{E}$, si $|\mu|(B)=\infty$, alors $\exists A_1,B_1\in\mathcal{E}$ tels que $A_1\cup B_1=B$, $A_1\cap B_1=\varnothing$, $|\mu(A_1)|>1$ et $|\mu|(B_1)=\infty$ $(**)$.

Preuve de $(**)$. $\exists C_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ partitionnant B tels que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu(C_n)| > 2(1 + |\mu(B)|)$.

On pose $S_+ = \{n \in \mathbb{N} : \mu(C_n) > 0\}$ et $S_- = \mathbb{N} \backslash S_+$.

Sans perte de généralité, on suppose que $\sum_{n \in S_+} \mu(C_n) \geqslant -\sum_{n \in S_-} \mu(C_n)$. On pose alors $A_1 = \bigcup_{n \in S_+} C_n$ et $B_1 = \bigcup_{S_-} C_n$. $A_1 \cap B_1 = \varnothing$ et $A_1 \cup B_1 = B$.

On a $2(1 + |\mu(B)|) \leqslant \sum_{n \in S_+} \mu(C_n) - \sum_{n \in S_-} \mu(C_n) \leqslant 2 \sum_{n \in S_+} \mu(C_n) = 2\mu(A_1)$.

On a donc $\mu(A_1) \geqslant 1 + |\mu(B)|$, or $|\mu(A_1)| \leqslant |\mu|(A_1)$, donc $|\mu|(A_1) \geqslant 1$.

$|\mu(B_1)| = |\mu(B) - \mu(A_1)| \geqslant |\mu(B)| - |\mu(A_1)| \geqslant 1$

Donc $|\mu|(B_1) \geqslant |\mu(B_1)| \geqslant 1$

On utilise $(*)$: $\infty = |\mu|(B) \leqslant |\mu(A_1)| + |\mu(B_1)|$ donc $|\mu|(A_1) = \infty$ ou $|\mu|(B_1) = \infty$. Quitte à échanger les rôlesde A_1 et B_1, cela montre $(**)$.

Montrons que $|\mu|(B) < \infty$ $\forall B \in \mathcal{E}$ lorsque μ est une mesure signée.

On suppose $\exists B \in \mathcal{E} : \mu(B) = \infty$. En appliquant demnaière répétée $(**)$, on montre l'existence d'une suite $A_n \in \mathcal{E}, n \geqslant 0$ d'ensembles deux à deux disjoints tels que $|\mu(A_n)| \geqslant 1$. Or la suite de terme général $(\mu(A_n))$ doit converger absolument, absurde.

On revient aux mesures complexes : montrons que $|\mu|(B) < \infty$ $\forall B \in \mathcal{E}$, avec μ mesure complexe.

Preuve. On pose $\nu_1(A) = \mathrm{Re}(\mu(A))$ et $\nu_2 = \mathrm{Im}(\mu(A))$. On sait que ν_1 et ν_2 sont des mesures signées, et on a $\nu_1(A) + i\,\nu_2(A) = \mu(A)$.

Comme toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, il existe une constante $k \in]0, \infty[$ telle que $\forall A \in \mathcal{E}, |\mu(A)| = k\,|\nu_1(A)| + k\,|\nu_2(A)|$.

Cela implique que $|\mu|(A) \leqslant k\,|\nu_1|(A) + k\,|\nu_2|(A) < \infty$.

Soit $B_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ deux à eux disjoints. On pose $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $|\mu|(B_n) < \infty$, il existe une partition $A_p^n \in \mathcal{E}, p \in \mathbb{N}$ de B_n telle que

$$|\mu|(B_n) \leqslant \varepsilon\, 2^{-n-1} + \sum_{p \in \mathbb{N}} |\mu(A_p^n)|$$

$\sum |\mu|(B_n) \leqslant \varepsilon + \sum_{n,p \in \mathbb{N}} |\mu(A_p^n)| \leqslant \varepsilon + |\mu|(B)$, car $A_p^n, n, p \in \mathbb{N}$ est une partition de B.

Donc comme ε est arbitrairement petit, on a que $\sum |\mu|(B_n) \leqslant |\mu|(B)$, on a donc la sigma-additivité. $\square$

Exemple $(*)$. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, et $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ des mesures finies positives. On pose, $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mu(A) = \nu_1(A) - \nu_2(A) + i\,(\nu_3(A) - \nu_4(A))$. Alors μ est une mesure complexe.

Exemple. $\nu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ une mesure positive. On se donne $h \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \nu)$. $\forall A \in \mathcal{E}$, on pose $\mu(A) = \int_A h\,\mathrm{d}\nu$. On vérifie que μ est une mesure complexe. On utilisera la notation $\mu = h\,\nu$.

Prop. Si $h\,\nu = f\,\nu$,alors $h = f$ ν-presque partout.

C'est déjà démontré pour les cas h et f des fonctions positives. On s'y rammène.en prenant $(\mathrm{Re})_+, (\mathrm{Re})_-, (\mathrm{Im})_+, (\mathrm{Im})_-$ (en exercice).

Déf. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une mesure signée. On pose $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$, et $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$. Alors μ^+ et μ^- sont des mesures positives finies, μ^+ est la *variation positive* de μ et μ^- est la *variation négative* de μ. On a $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

Remarque. Toute mesure complexe s'écrit sous la forme de l'exemple $(*)$.

IV.2. Absolue continuité et singularité des mesures

Déf. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

a) Soit $\mu\colon \mathcal{E} \to [0, \infty]$ une mesure positive, et $\nu\colon \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ une mesure complexe. Alors ν est *absolument continue* par rapport à μ si $\forall A \in \mathcal{E},\ \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$.

   Notation. $\nu \ll \mu$.

b) Soit $\nu\colon \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ une mesure complexe. Elle est *concentrée* sur $A \in \mathcal{E}$ si $\forall B \in \mathcal{E}$, $\nu(B) = \nu(A \cap B)$.

c) Soient $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{E} \to \begin{matrix}\mathbb{C}\\ [0,\infty]\end{matrix}$ des mesures complexes/positives. Alors elles sont *mutuellement singulières* (ou étrangères) si $\exists A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ tels que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, ν_1 est concentrée sur A_1 et ν_2 est concentrée sur A_2.

   Notation. $\nu_1 \perp \nu_2$

Remarque. Si ν est une mesure positive, alors elle est concentrée sur A si $\nu(E \backslash A) = 0$ (et réciproquement). Ce n'est pas vrai pour une mesure complexe (exemple différence de deux masses de Dirac).

Exemple 1. Si ν est une mesure diffuse, alors $\forall x \in E, \delta_x \perp \nu$.

Exemple 2. Il existe $\mu\colon \mathcal{B}([0,1]) \to [0,1]$ une mesure de probabilité diffuse telle que $l \perp \mu$.

Exemple 3. Soit $\mu\colon \mathcal{E} \to [0, \infty]$ une mesure positive et soit $h \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$. On pose $\nu = h\,\mu$, ie $\nu(A) = \int_A h\,\mathrm{d}\mu$. Alors $\nu \ll \mu$. En effet, si $\mu(A) = 0$, alors $\int_A h\,\mathrm{d}\mu = 0$.

Prop. $\mu\colon \mathcal{E} \to [0, \infty]$ une mesure positive. ν, ν_1, ν_2 des mesures complexes ou positives.

1. Si ν est concentrée sur A, alors $|\nu|$ aussi (sous-entendu ν est une mesure complexe).
2. Si $\nu_1 \perp \nu_2$, alors $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.
3. Si $\nu_1 \ll \mu$ et $\nu_2 \ll \mu$, alors $c_1\,\nu_1 + c_2\,\nu_2 \ll \mu$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
4. Si $\nu \ll \mu$, alors $|\nu| \ll \mu$.
5. Si $\nu_1 \perp \mu$ et $\nu_2 \perp \mu$, alors $c_1\,\nu_1 + c_2\,n_2 \perp \mu$.
6. Si $\nu_1 \ll \mu$ et $\nu_2 \perp \mu$, alors $\nu_1 \perp \nu_2$.
7. Si $\nu \perp \mu$ et $\nu \ll \mu$, alors $\nu = 0$.

Preuves. En exercice.

IV.3. Théorème de Radon-Nikodym

Théorème (pour les mesures complexes). Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. On se donne $\mu\colon \mathcal{E} \to [0, \infty]$ une mesure positive sigma-finie, et $\nu\colon \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ une mesure complexe. Alors :

1. Il existe un unique couple de mesures complexes $(\nu_{\text{abs}}, \nu_{\text{sing}})$ tel que $\nu = \nu_{\text{abs}} + \nu_{\text{sing}}$, avec $\nu_{\text{abs}} \ll \mu$ et $\nu_{\text{sing}} \perp \mu$

   $(\nu_{\text{abs}}, \nu_{\text{sing}})$ est appellée *décomposition de Lebesgue* de ν.

2. Il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, unique à modification μ-preque partout près, telle que

$$\nu_{\text{abs}}(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu, \text{ c'est-à-dire } \nu_{\text{abs}} = f\,\mu$$

On appelle f la dérivée de Radon-Nikodyn de ν par rapport à μ, et on la note souvent $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Preuve. On suppose d'abord que $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ est une mesure positive finie.

μ est sigma-finie, donc $\exists E_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(E_n) < \infty$.

On pose

$$w = \sum_{n \geqslant 0} \frac{2^{-n-1}}{1 + \mu(E_n)} \mathbf{1}_{E_n}$$

$w : E \to [0, 1]$, et on a même $\forall x \in E, 0 < w(x) < 1$. $\int_E w \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

On pose $\pi = \nu + w\,\mu$, ie $\pi(A) = \nu(A) + \int_A w \, \mathrm{d}\mu$. $\pi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ est une mesure positive finie.

$\pi(E) = \nu(E) + \int_E w \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

Soit $f \in \mathcal{L}^2(E, \mathcal{E}, \pi)$. On pose $\Lambda(f) = \int_E f \, \mathrm{d}\nu$.

$$\begin{aligned}
\int_E |f| \, \mathrm{d}\nu &\leqslant \int_E |f| \, \mathrm{d}\nu + \int_E |f| \, w \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_E |f| \, \mathrm{d}\pi \\
&= \int_E |f| \times 1 \times \mathrm{d}\pi \\
&\overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \sqrt{\int_E f^2 \, \mathrm{d}\pi} \sqrt{\int_E 1^2 \, \mathrm{d}\pi}
\end{aligned}$$

$\forall f \in \mathcal{L}^2(E, \mathcal{E}, \pi)$, $|\Lambda(f)| = \left|\int_E f \, \mathrm{d}\nu\right| \leqslant \sqrt{\pi(E)} \sqrt{\int_E f^2 \, \mathrm{d}\pi}$.

$\Lambda : \mathcal{L}^2(E, \mathcal{E}, \pi) \to \mathbb{C}$ est une fonction linéaire continue pour $\|\cdot\|_{2,\pi}$.

Par Riesz-Fréchet, il existe $g_0 \in L^2(E, \mathcal{E}, \pi)$ telle que $\forall f \in L^2(E, \mathcal{E}, \pi)$, $\Lambda(F) = \int_E f \, \mathrm{d}\nu = \int_E f g_0 \, \mathrm{d}\pi$.

Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $\pi(A) \geqslant 0$. Alors $\nu(A) = \int_E \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\nu = \int_A g_0 \, \mathrm{d}\pi$.

$$0 \leqslant \frac{\nu(A)}{\pi(A)} = \frac{1}{\pi(A)} \int_A g_0 \, \mathrm{d}\pi \leqslant 1 \qquad (*)$$

(en effet, $\pi(A) = \nu(A) + \int_A w \, \mathrm{d}\mu$, donc $\frac{n(A)}{\pi(A)} \in [0, 1]$)

On montre que π-presque partout, $0 \leqslant g_0 \leqslant 1$.

> **Preuve.** Soit $a > 1$ et $A = \{g_0 > a\}$.
>
> $\mathbf{1}_A \, g_0 \geqslant a \, \mathbf{1}_A$. Donc si $\pi(A) > 0$, alors $\frac{1}{\pi(A)} \int_A g_0 \, \mathrm{d}\pi \geqslant a > 1$, ce qui contredit $(*)$.
>
> Donc $\pi(A) = 0$.
>
> $\{g_0 > 1\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{g_0 \geqslant 1 + 2^{-n}\}$. $\pi(\{g_0 \geqslant 1\}) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(\{g_0 \geqslant 1 + 2^{-n}\}) = 0$, donc π-presque partout, $g_0 \leqslant 1$.
>
> On fixe $b > 0$, et on pose $A = \{g_0 < -b\}$. Si $\pi(A) > 0$, $\frac{1}{\pi(A)} \int_A g_0 < 0$, ce qui contredit $(*)$, donc $\pi(A) = 0$
>
> $\{g_0 < 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{g_0 < -2^{-n}\}$, donc $\pi(\{g_0 < 0\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(\{g_0 < -2^{-n}\}) = 0$,

donc $g_0 \geqslant 0$ π-preque partout.

Quitte à modifier g_0 sur un ensemble de mesure π nulle, on suppose que $\forall x \in E$, $0 \leqslant g_0(x) \leqslant 1$, et que $\forall f \in L^2(E, \mathcal{E}, \pi)$, $\int_E f \,\mathrm{d}\nu = \int_E f g_0 \,\mathrm{d}\pi$.

Or $\int_E f g_0 \,\mathrm{d}\pi = \int_E f g_0 \,\mathrm{d}\nu + \int_E f g_0 \, w \,\mathrm{d}\mu$.

Donc $\forall f \in L^2(E, \mathcal{E}, \pi)$, $\int_E f\,(1 - g_0) \,\mathrm{d}\nu = \int_E f g_0 \, w \,\mathrm{d}\mu$.

On note $A_{\text{sing}} = g_0^{-1}(\{1\})$, et $A_{\text{abs}} = E \setminus A_{\text{sing}} = g_0^{-1}([0, 1[)$. $A_{\text{sing}} \cap A_{\text{abs}} = \varnothing$ et $A_{\text{sing}} \cup A_{\text{abs}} = E$.

On pose $\nu_{\text{abs}} = \nu(\cdot \cap A_{\text{abs}})$, et $\nu_{\text{sing}} = \nu(\cdot \cap A_{\text{sing}})$. On a bien $\nu = \nu_{\text{abs}} + \nu_{\text{sing}}$, $\nu_{\text{abs}} \perp \nu_{\text{sing}}$.

Montrons que $\nu_{\text{sing}} \perp \mu$: $\int_E \mathbf{1}_{A_{\text{sing}}} g_0 \, w \,\mathrm{d}\mu = \int_E \mathbf{1}_{A_{\text{sing}}} \underbrace{(1 - g_0)}_{=0} \,\mathrm{d}\nu = 0$.

$\int \mathbf{1}_{A_{\text{sing}}} w \,\mathrm{d}\mu = 0$, donc μ-presque partout $\mathbf{1}_{A_{\text{sing}}} w = 0$, donc μ-presque partout, $\mathbf{1}_{A_{\text{sing}}} = 0$, donc $\mu(A_{\text{sing}}) = 0$.

On pose maintenant $h_n = 1 + g_0 + g_0^2 + \cdots + g_0^{n-1}$. Alors $0 \leqslant h_n \leqslant n$, h_n est bornée donc $h_n \in L^2(E, \mathcal{E}, \pi)$ puisque π est une mesure finie. On applique les égalités précédentes avec $f = \mathbf{1}_A \, h_n$: $\int_E \mathbf{1}_A \, h_n \,(1 - g_0) \,\mathrm{d}\nu = \int_E \mathbf{1}_A \, h_n \, w \,\mathrm{d}\mu = \int_E \mathbf{1}_{A \cap A_{\text{abs}}} h_n \,(1 - g_0) \,\mathrm{d}\nu$.

Or $h_n(1 - g_0) = 1 - g_0^n$. $\mathbf{1}_{A \cap A_{\text{abs}}} h_n (1 - g_0) = \mathbf{1}_{A \cap A_{\text{abs}}} (1 - g_0^n) \uparrow \mathbf{1}_{A \wedge A_{\text{abs}}}$.

Donc par convergence monotone, $\int \mathbf{1}_A \, g_n (1 - g_0) \,\mathrm{d}\nu = \int_{A \cap A_{\text{abs}}} (1 - g_0^n) \,\mathrm{d}\nu \xrightarrow[n \to \infty]{\uparrow} \nu(A \cap A_{\text{abs}}) = \nu_{\text{abs}}(A)$.

On pose $h = \sup_{n \geqslant 0} h_n$, $h_n \leqslant h_{n+1}$. Par convergence monotone, $\int \mathbf{1}_A \, h_n \, w \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n \to \infty]{\uparrow} \int_A h \, w \,\mathrm{d}\mu$

Donc $\forall A \in \mathcal{E}, \nu_{\text{abs}}(A) = \int_A h \, w \,\mathrm{d}\mu$. On pose $f = h \, w : E \to [0, \infty]$, $\mathcal{E}$-mesurable.

$\nu_{\text{abs}}(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ donc $f < \infty$ μ-presque partout.

Quitte à modifier f sur un μ-négligeable, il existe $f : E \to \mathbb{R}^+$ telle que $\nu_{\text{abs}} = f \,\mathrm{d}\mu$.

2013-11-18

Unicité de la décomposition $(\nu_{\text{sing}}, \nu_{\text{abs}})$. ($\nu$ mesure complexe)

On suppose $(\nu'_{\text{sing}}, \nu'_{\text{abs}})$ telle que $\nu = \nu'_{\text{sing}} + \nu'_{\text{abs}}$, et $\nu'_{\text{sing}} \perp \mu$ et $\nu'_{\text{abs}} \ll \mu$.

$\nu_{\text{abs}} - \nu'_{\text{abs}} = \nu_{\text{sing}} - \nu'_{\text{sing}} = \xi$. $\xi \ll \mu$ et $\xi \perp \mu$, donc $\xi = 0$. On a donc $\nu_{\text{abs}} = \nu'_{\text{abs}}$ et $\nu_{\text{sing}} = \nu'_{\text{sing}}$.

Existence de $(\nu_{\text{sing}}, \nu_{\text{abs}})$ pour ν complexe.

Il existe $\nu^1, \nu^2, \nu^3, \nu^4$ des mesures positives finies telles que $\nu = \nu^1 - \nu^2 + i\,(\nu^3 - \nu^4)$

$\forall j \in \{1, \ldots, 4\}$ $\nu^j = \nu^j_{\text{sing}} + \nu^j_{\text{abs}}$, avec $\nu^j_{\text{abs}} = f_j \, \mu$, et $\nu^j_{\text{sing}} \perp \mu$

On pose $\nu_{\text{sing}} = \nu^1_{\text{sing}} - \nu^2_{\text{sing}} + i\,(\nu^3_{\text{sing}} - \nu^4_{\text{sing}})$, $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$, $\nu_{\text{abs}} = f \, \mu$

On a bien $\nu_{\text{sing}} \perp \mu$, $\begin{cases} \nu_{\text{abs}} = \nu^1_{\text{abs}} - \nu^2_{\text{abs}} + i\,(\nu^3_{\text{abs}} - \nu^4_{\text{abs}}) \\ \nu_{\text{abs}} \ll \mu \end{cases}$ et $\nu_{\text{abs}} + \nu_{\text{sing}} = \nu$

Fin de la preuve du théorème de Radon-Nikodym pour ν mesure complexe. □

Déf. $(E, \mathcal{E})$ espace mesurable, $\nu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ mesure positive. ν est dite *somme de mesures finies* s'il existe une suite $\nu_n : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$ suite de mesures positives finies telles que $\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_n$.

On montre que ν sigma-finie $\Rightarrow$ ν somme de mesures finies.

Si ν est somme de mesures finies, alors $\int_E f \,\mathrm{d}\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_E f \,\mathrm{d}\nu_n$ (c'est vrai pour les fonctions indicatrices, puis utiliser le lemme technique).

Théorème (pour les mesures positives). Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $\mu: E \to [0, \infty]$ une mesure sigma-finie, et $\nu: E \to [0, \infty]$ une mesure somme de mesures finies. Alors :

- Il existe un unique couple de mesures $(\nu_{\text{sing}}, \nu_{\text{abs}})$ telles que $\nu = \nu_{\text{sing}} + \nu_{\text{abs}}$, $\nu_{\text{sing}} \perp \mu$, $\nu_{\text{abs}} \ll \mu$, et $\exists f: E \to [0, \infty]$ $\mathcal{E}$-mesurable, unique à modification μ-presque partout telle que $\nu = f\,\mu$ (f est la dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ).

- Si ν est sigma-finie, alors f peut être choisie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Preuve. $\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^n$, avec ν^n mesures positives finies. $\nu^n = \nu_{\text{sing}}^n + f_n\,\mu$, avec $f_n: E \to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{E}$-mesurables, et $\nu_{\text{sing}}^n \perp \mu$.

On pose $\nu_{\text{sing}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_{\text{sing}}^n$, on vérifie que $\nu_{\text{sing}} \perp \mu$ (exercice).

On pose $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ et $\nu_{\text{abs}} = f\,\mu$. On a bien $\nu = \nu_{\text{sing}} + \nu_{\text{abs}}$ (unicité en exercice). □

IV.4. Conséquences. Décomposition de Jordan

Théorème (décomposition polaire). Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $\mu: \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ une mesure complexe. Alors il existe $h: E \to \mathbb{C}$ $\mathcal{E}$-mesurable telle que $\forall x \in E, |h(x)| = 1$ et $\mu = h\,|\mu|$.

Preuve. Il est clair que $\mu \ll |\mu|$ car $|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A)$.

Par Radon-Nikodym, il existe $h: E \to \mathbb{C}$ $\mathcal{E}$-mesurable, $h \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, |\mu|)$, et $\mu = h\,|\mu|$.

Soit $0 \leqslant r < 1$, $A_r = \{|h| \leqslant r\} \in \mathcal{E}$. Soit $B_n \in \mathcal{E}, n \geqslant 0$ une partition de E.

$\sum |\mu(A_r \cap B_n)| = \sum_{n \geqslant 0} \left| \int_{A_r \cap B_n} h\,\mathrm{d}|\mu| \right| \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \int_{A_r \cap B_n} |h|\,\mathrm{d}|\mu| = \int_{A_r} |h|\,\mathrm{d}|\mu|$

$\sum_{n \geqslant 0} |\mu(A_r \cap B_n)| \leqslant r\,|\mu|(A_r)$, pour toute partition $B_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ de E.

En prenant le suprémum sur $(B_n)_{n \geqslant 0}$ partition de E, $|\mu|(A_r) \leqslant r\,|\mu|(A_r)$, $r < 1$

$\Rightarrow |\mu|(A_r) = 0$, $|\mu|(\{|h| \leqslant r\}) = 0$ $\forall r < 1$.

$|\mu|(\{|h| < 1\}) = |\mu|\big(\bigcup_{n \geqslant 1} \{|h| \leqslant 1 - 2^{-n}\}\big) = 0$

$|\mu|$-presque partout, $|h| \geqslant 1$

Soit $z \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0$ tels que $|z| - 1 > \varepsilon$. On s'intéresse à $B = \{x \in E: |h(x) - z| \leqslant \varepsilon\}$

$$\begin{aligned} |\mu|(B) &\geqslant |\mu(B)| \\ &= \left| \int_B h\,\mathrm{d}|\mu| \right| \\ &\geqslant \left| \int_B (h - z)\,\mathrm{d}|\mu| + z\,|\mu|(B) \right| \\ &\geqslant |z|\,|\mu|(B) - \int_B |h - z|\,\mathrm{d}|\mu| \\ &\geqslant |z|\,|\mu|(B) - \varepsilon|\mu|(B) \\ &= (|z| - \varepsilon)\,|\mu|(B) \end{aligned}$$

Donc $|\mu|(B) \geqslant \underbrace{(|z| - \varepsilon)}_{>1} |\mu|(B)$ donc $|\mu|(B) = 0$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall \varepsilon > 0$, avec $|z| > 1 + \varepsilon$, on a $|\mu|(\{|h - z| < \varepsilon\}) = 0$ $(\mathbb{C} \backslash \bar{B}(0, 1))$. □

Corollaire. $(E, \mathcal{E}, \mu)$ espace mesuré complexe, $h = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|}$. $\forall f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, |\mu|)$,

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,h\,\mathrm{d}|\mu|$$

$f \mapsto \int_E f\, \mathrm{d}\mu$ est $\mathbb{C}$-linéaire, $\left|\int_E f\, \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f|\, \mathrm{d}|\mu|$.

La convergence dominée est vraie pour ces intégrales, l'interversion série-intégrale de même.

Prop. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré positif, avec μ sigma-finie, soit $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$. On pose $\nu = f\mu$. Alors : $|\nu| = |f|\, \mu$.

Théorème (décomposition de Jordan). $(E, \mathcal{E})$ espace mesurable, $\mu: \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une mesure signée. On rappelle que $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$.Alors:

1. Il exite A_+ et A_- dans $\mathcal{E}$ tels que $A_+ \cup A_- = E$, $A_+ \cap A_- = \varnothing$,

   $\mu^+ = \mu(\cdot \cap A_+)$ et $\mu^- = \mu(\cdot \cap A_{()})$. On a donc $\mu^+ \perp \mu^-$

2. $\forall B \in \mathcal{E}$, $\mu^+(B) = \sup\{\mu(C)\,; C \in \mathcal{E}: C \subset B\}$ et $\mu^-(B) = -\inf\{\mu(C)\,; C \in \mathcal{E}: C \subset B\}$.

3. Si μ_1 et μ_2 eont deux mesures positives finies telles que $\mu = \mu_1 - \mu_2$, alors $\forall B \in \mathcal{E}$, $\mu_1(B) \geqslant \mu^+(B)$ et $\mu_2(B) \geqslant \mu^-(B)$

Preuve. On note $h = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|}$. $h: E \to \{-1, 1\}$ $\mathcal{E}$-mesurable.

On prend $A_+ = h^{-1}(\{1\})$ et $A_- = h^{-1}(\{-1\})$.

$\mu(B) = |\mu|(B \cap A_+) - |\mu|(B \cap A_-)$

$\mu^+(B) = \frac{1}{2}(|\mu|(B) + \mu(B)) = |\mu|(B \cap A_+)$ et $\mu^-(B) = \frac{1}{2}(|\mu|(B) - \mu(B)) = |\mu|(B \cap A_-)$

cela prouve le point (1).

Preuve de (2) : si $C \subset B$, $\mu(C) = \mu^+(C) - \mu^-(C) \leqslant \mu^+(C) \leqslant \mu^+(B)$, donc $\sup\{\mu(C)\,; C \in \mathcal{E}: C \subset B\} \leqslant \mu^+(B)$, or $\mu(B \cap A_+) \leqslant \sup\{\mu(C); C \in \mathcal{E}: C \subset B\}$, donc $\mu^+(B) = \sup\{\mu(C); C \in \mathcal{E}: C \subset B\}$. Pareil pour μ^-.

Preuve de (3) : Soit $C \in \mathcal{E}, C \subset B$. $\mu(C) = \mu_1(C) - \mu_2(C) \leqslant \mu_1(C) \leqslant \mu_1(B)$. On prend le sup sur les $C \in \mathcal{E}, C \subset B$, et par (2) on a bien $\mu^+(B) \leqslant \mu_1(B)$, pareil pour μ^-. □

IV.5. Dualité L^p-L^q

Dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Déf. Soit $(H, \|\|)$ un $\mathbb{K}$-ev normé et $\phi: H \to \mathbb{K}$ linéaire. ϕ est continue si $\|\phi\|' = \sup\{[\phi(x)]\,; x \in H: \|x\| = 1\} < \infty$. $\|\phi\|'$ est une norme sur l'espace des formes linéaires continues, ie sur le dual topologique de H.

Exemple. $(E, \mathcal{E}, \mu)$ espace mesuré, avec μ positive. Soit $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$ conjugués. Soit $g \in L^q(E, \mathcal{E}, \mu)$. On pose $\phi(f) = \int f\, g\, \mathrm{d}\mu$, $\forall f \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$. On vérifie par Hölder que $|\phi(f)| \leqslant \|g\|_q \|f\|_p$, donc ϕ est une forme linéaire continue de L^p, et $\|\phi\|'_p \leqslant \|g\|_q$.

Théorème de dualité L^p-L^q. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré avec μ positive sigma-finie. Soit $p \in [1, \infty[$ et $q \in]1, \infty]$ son exposant conjugué. Alors :

1. Pour toute forme linéaire continue $\phi: L^p(E, \mathcal{E}, \mu) \to \mathbb{K}$, il existe un unique $g \in L^q(E, \mathcal{E}, \mu)$ tel que $\forall f \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$, $\phi(f) = \int_E f\, g\, \mathrm{d}\mu$

2. On a $\|\phi\|'_p = \|g\|_q$

3. $\phi \mapsto g_\phi$ est linéaire bijective isométrique.

On identifie donc le dual de $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ avec $L^q(E, \mathcal{E}, \mu)$.

(cas particulier : $p = q = 2$, L^2 est son propre dual)

V. Constructions de mesures

V.1. Mesures extérieures

Déf. Soit E un ensemble non-vide. Soit $\mu: \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$. Alors c'est une *mesure extérieure* si :

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu(A) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \mu(B_n)$ pour tout $A \subset \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$, avec $A \subset E$ et $B_n \subset E, n \in \mathbb{N}$.

Remarques.

1. Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

   Une mesure extérieure est sigma-sous-additive : $\forall B_n \subset E, n \geqslant 0$, $\mu\big(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\big) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \mu(B_n)$

2. Malgré son nom, une mesure extérieure n'est en général pas une mesure.

   La restriction d'une mesure extérieure à une certaine classe de sous-ensembles va être une mesure.

Déf. Soit $\mu: \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ une mesure extérieure. Un sous-ensemble $B \subset E$ est dit μ-mesurable si $\forall X \subset E, \mu(X) = \mu(X \cap B) + \mu(X \setminus B)$. On note $\mathcal{E}(\mu)$ la classe des ensembles μ-mesurables

(remarque : $X \setminus B = \{x \in E : x \in X \wedge x \notin B\} = X \cap (E \setminus B)$, pas besoin de supposer $B \subset X$)

Lemme. $\mu: \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ une mesure extérieure.

$$B \in \mathcal{E}(\mu) \Leftrightarrow \forall X \subset E, \mu(X) \geqslant \mu(X \cap B) + \mu(X \setminus B)$$

Preuve. $\forall X, \forall B$, on a toujours $\mu(X) \leqslant \mu(X \cap B) + \mu(X \setminus B)$ □

Théorème. E non vide, $\mu: \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ une mesure extérieure.

1. $\mathcal{E}(\mu)$ est une tribu qui contient les ensembles $N \subset E$ tels que $\mu(N) = 0$ (μ-négligeables)
2. La restriction de μ à $\mathcal{E}(\mu)$ est une mesure positive.

Preuve. $\mathcal{E}(\mu)$ est stable par passage au complémentaire, et $\varnothing \in \mathcal{E}(\mu)$.

Si $N \subset E$ avec $\mu(N) = 0$, alors $\forall X \subset E$, $\mu(X) \leqslant \mu(X \cap N) + \mu(X \setminus N) \leqslant \mu(N) + \mu(X \setminus N) = \mu(X \setminus N) \leqslant \mu(X)$, on a donc des égalités, $\mu(N) = \mu(X \cap N) + \mu(X \setminus N)$, donc $N \in \mathcal{E}(\mu)$.

Soit $B, C \in \mathcal{E}(\mu)$. Soit $X \in E$,

$$\begin{array}{rcl}
\mu(X) & = & \mu(X \cap B) + \mu(X \setminus B) \\
& = & \mu(X \cap B) + \mu((X \setminus B) \setminus C) + \mu((X \setminus B) \cap C) \\
& = & \mu(X \cap B) + \mu((X \setminus B) \cap C) + \mu(X \setminus (B \cup C)) \\
& \geqslant & \mu((X \cap B) \cup ((X \setminus B) \cap C)) + \mu(X \setminus (B \cup C)) \\
& \geqslant & \mu(X \cap (B \cup C)) + \mu(X \setminus B \cup C)
\end{array}$$

donc $B \cup C \in \mathcal{E}(\mu)$ par le lemme précédent.

Montrons que $\mathcal{E}(\mu)$ est stable par union dénombrable :

Soit $B_n \in \mathcal{E}(\mu), n \in \mathbb{N}$. On pose $C_0 = B_0$, $\forall n \geqslant 1, C_n = (\bigcup_{k=1}^{n} B_k) \setminus \big(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\big) \in \mathcal{E}(\mu)$

Les $(C_n)_{n \geqslant 0}$ sont deux à deux disjoints, $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} C_k$ et $\bigcup_{n \geqslant 0} B_n = \bigcup_{n \geqslant 0} C_n = B$.

Soit $X \subset E$,

$$\begin{array}{rcl}\mu(X) & = & \mu(X \cap \bigcup_{k=0}^n C_k) + \mu(X \backslash \bigcup_{k=0}^n C_k) \\ & = & (\sum_{k=0}^n \mu(X \cap C_k)) + \mu(X \setminus \bigcup_{k=0}^n C_k) \\ & \geqslant & \sum_{k=0}^n \mu(X \cap C_k) + \mu(X \backslash B)\end{array}$$

Donc, $\forall X \subset E$:

$$\mu(X) \;\geqslant\; \mu(X \backslash B) + \textstyle\sum_{n \geqslant 0} \mu(X \cap C_n) \tag{3}$$

Or $\sum_{n \geqslant} \mu(X \cap C_n) \geqslant \mu\big(\bigcup_{n \geqslant 0} X \backslash C\big) = \mu(X \cap \bigcup C_n) = m(X \cap B)$.

On a $\mu(X) \geqslant \mu(X \backslash B) + \mu(X \cap B)$, $\forall X \in E$, donc $B = \bigcup_{n \geqslant 0} B_n \in \mathcal{E}(\mu)$.

On a donc que $\mathcal{E}(\mu)$ est une tribu.

Par (3), on a $\forall X \subset E, \mu(X) \geqslant \mu(X \backslash B) + \sum_{n \geqslant 0} \mu(X \cap C_n) \geqslant \mu(X \backslash B) + \mu(X \cap B) = \mu(X)$

Donc $\forall X \subset E, \mu(X) = \mu(X \backslash B) + \sum_{n \geqslant 0} \mu(X \cap C_n)$,

c'est vrai $\forall B_n \in \mathcal{E}(\mu), n \geqslant 0$, et $C_n = \bigcup_{k=0}^n B_k \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} B_k$.

Si les $B_n \in \mathcal{E}(\mu)$ deux à deux disjoints, alors $C_n = B_n$. On applique l'égalité précédente à $X = B = \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$, ce qui donne $\mu\big(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\big) = \mu(B) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(B_n)$. □

Lemme. Soit $\mu : \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ une mesure extérieure, soit $f : E \to [-\infty, +\infty]$. Alors f est $\mathcal{E}(\mu)$-mesurable si

$$\forall X \subset E, \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a < b, \mu(X) \geqslant \mu(X \cap \{f \leqslant a\}) + \mu(X \cap \{f \geqslant b\}) \qquad (*)$$

Preuve. On suppose $(*)$ et on doit montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{f \leqslant x\} \in \mathcal{E}(\mu)$.

On fixe $a_1 \leqslant b_1 < a_2 \leqslant b_2 < \cdots < a_n \leqslant b_n$, soit $X \subset E$.

On pose $X^* = X \cap \bigcup_{k=1}^n \{f \in [a_k, b_k]\}$. On applique $(*)$ à $a = b_{n-1}$ et $b = a_n$:

$\mu(X^*) \geqslant \mu(X^* \cap \{f \leqslant b_{n-1}\}) + \mu(X^* \cap \{f \geqslant a_n\})$.

$\mu(X \cap \bigcup_{k=1}^n \{f \in [a_k, b_k]\}) \geqslant \mu\big(X \cap \bigcup_{k=0}^{n-1} \{f \in [a_k, b_k]\}\big) + \mu(X \cap \{f \in [a_n, b_n]\})$

$\forall a_1 \leqslant b_1 < a_2 \leqslant b_2 < \cdots < a_n \leqslant b_n, \forall X \subset E,\ \mu(X \cap \bigcup_{k=1}^n \{f \in [a_k, b_k]\}) \geqslant \sum_{k=1}^n \mu(X \cap \{f \in [a_k, b_k]\})$ (notons cette propriété $(**)$).

Soit $x \in \mathbb{R}, X \subset E$

$\mu(X) \geqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(X \cap \{f \in [x + 2^{-2n-2}, x + 2^{-2n-1}]\})$

$\mu(X) \geqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(X \cap \{f \in [x + 2^{-2n-1}, x + 2^{-2n}]\})$

On somme : $2\,\mu(X) \geqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(X \cap \{f \in [x + 2^{-n-1}, x + 2^{-n}]\})$

On suppose $\mu(X) < \infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n \geqslant n_\varepsilon$,

$$\begin{array}{rcl}\varepsilon & > & \displaystyle\sum_{n \geqslant n_\varepsilon} \mu(X \cap \{f \in [x + 2^{-n-1}, x + 2^{-n}]\}) \\ & > & \mu(X \cap \{f \in]x, x + 2^{-n_\varepsilon}]\})\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\mu(X \cap \{f \leqslant x\}) + \mu(X \cap \{f > x\}) & \leqslant & \mu(X \cap \{f \leqslant x\}) + \mu(X \cap \{f \in]x, x + 2^{-n_\varepsilon}]\}) + \mu(X \cap \{f \geqslant \\ & & x + 2^{-n_\varepsilon}\}) \\ & \leqslant & \mu(X) + \varepsilon \text{ par } (*)\end{array}$$

$\forall X \subset E$ tel que $\mu(X) < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\mu(X \cap \{f \leqslant x\}) + \mu(X \cap \{f > x\}) \leqslant \mu(X) + \varepsilon$

donc $\mu(X \cap \{f \leqslant x\}) + \mu(X \cap \{f > x\}) \leqslant \mu(X)$

On a donc $\forall X \subset E$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{f \leqslant x\} \in \mathcal{E}(\mu)$ □

V.2. Extension de Carathéodory

V.2.a. Théorème d'extension. Construction de la mesure de Lebesgue

Déf. Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une classe d'ensembles.

- $\mathcal{A}$ est une *algèbre* si elle est stable par union finie, par passage au complémentaire et si $\varnothing \in \mathcal{A}$.

- Soit $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, avec $\mathcal{A}$ une algèbre.

  C'est une *fonction additive d'ensembles* si $\forall A$, $B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \varnothing$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

  C'est une fonction *sigma-additive d'ensembles* si $\forall A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ deux-à-deux disjoints tels que $\bigcup_{n \geqslant 0} A_n \in \mathcal{A}$, on a $\mu(A) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(A_n)$

- μ est dite *sigma-finie* s'il existe des ensembles $E_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$ et $\mu(E_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\mathcal{A}$ algèbre, est additive, alors $\mu(\varnothing) = 0$ et $\forall A, B \in \mathcal{A}$, si $A \subset B$ alors $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

En général ce n'est pas une mesure positive.

Proposition. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E, μ: $\mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ une fonction additive. On suppose que $\mu(E) < \infty$, alors : μ est sigma-additive $\Leftrightarrow$ $\forall A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ suite d'ensembles tq $A_{n+1} \subset A_n$ et $\bigcap_{n \geqslant 0} A_n = \varnothing$, on a $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0$. (notons $(*)$ cette deuxième propriété)

Preuve. On suppose que μ satisfait $(*)$. Soient $B_n \in \mathcal{A}$, $n \geqslant 0$ deux-à-deux disjoints tels que $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$. On pose $A_n = B \backslash (B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n)$. $A_{n+1} \subset A_n$, $A_n \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing$.

Comme $\mu(E) < \infty$, $\mu(A_n) = \mu(B) - \mu(B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n) = \mu(B) - \mu(B_0) - \cdots - \mu(B_n)$.

Par $(*)$, $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0$, donc $\mu(B) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(B_n)$, donc μ est sigma-additive.

Réciproque : vraie, laissée en exercice. □

Proposition. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E.

1. Soit $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ une fonction sigma-additive. Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors $\mu(\cdot \cap A) : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ est aussi sigma-additive.

2. Soient $\mu_n : \mathcal{A} \to [0, \infty], n \in \mathbb{N}$ des fonctions sigma-additives. Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ est sigma-additive.

Preuve. En exercice

Proposition. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{A}$ les unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ deux-à-deux disjoints. Alors les assertions suivantes sont vraies :

1. $\mathcal{P}$ est un pi-système, et $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

2. $\mathcal{A}$ est une algèbre contenant $\mathcal{P}$, et donc $\sigma(A) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

3. Il existe une unique fonction long$:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ sigma-additive et telle que $\forall a,b\in\mathbb{R}, a\leqslant b$, on ait $\text{long}([a,b])=b-a$.

Preuve. (1) et (2) : connu + exercice.

Définition de long. Soit I un intervalle, alors si I n'est pas borné on pose $\text{long}(I)=\infty$. Si I est borné, on note a son extrémité gauche et b son extrémité droite. On pose $\text{long}(I)=b-a$.

Supposons que $\forall q\in\mathbb{Z}$, il existe $\text{long}_q:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ sigma-additive telle que pour tout intervalle $I\in\mathcal{P}$, on ait $\text{long}_q(I)=\text{long}(I\cap[q,q+1[)$. On pose $\lambda=\sum_{q\in\mathbb{Z}}\text{long}_q:\mathcal{A}\to[0,\infty]$.

Par la proposition précédente, λ est sigma-additive.

Soit $I\in\mathcal{P}$ borné d'extrémités $a<b$. Si $b\leqslant q$ ou $a\geqslant q+1$, alors $I\cap[q,q+1]$ et vide ou est réduit à un point, dans tous les cas $\text{long}(I\cap[q,q+1[)=\text{long}_q(I)=0$.

Sinon, $I\cap[q,q+1[$ est un intervalle d'extrémité gauche $q\vee a$ et d'extrémité droite $q+1\wedge b$.

Donc $\text{long}_q(I)=(q+1)\wedge b-(q\vee a)$.

Dans les deux cas, on vérifie que $\text{long}_q(I)=((q+1)\wedge b-q\vee a)_+$

Donc $\lambda(I)=\sum_{q\in\mathbb{Z}}\text{long}_q(I)=\sum_{q\in Z}((q+1)\wedge b-q\vee a)_+=b-a$.

λ satisfait bien la propriété de l'énoncé.

On fixe $q\in\mathbb{Z}$, il suffit de montrer qu'il existe $\text{long}_q:\mathcal{A}_q\to[0,1]$ sigma-additive telle que $\forall I$ intervalle de $[q,q+1]$ d'extrémités $a\leqslant b$, $\text{long}_q(I)=b-a$, où $\mathcal{A}_q=\{A\cap[q,q+1]\,;A\in\mathcal{A}\}$ est l'ensemble des unions finies d'intervalles de $[q,q+1]$ deux-à-deux disjoints et est une algèbre.

Soient $I_1,\ldots,I_n\in\mathcal{P}$ des intervalles de $[q,q+1[$ deux-à-deux disjoints. On pose $\text{long}_q(I_1\cup\cdots\cup I_n)=\text{long}_q(I_1)+\cdots+\text{long}_q(I_n)$.

Cohérence de la définition : soient $J_1,\ldots,J_l\in\mathcal{P}$ des intervalles deux-à-deux disjoints de $[q,q+1[$, tels que $I_1\cup\cdots\cup I_n=J_1\cup\cdots\cup J_l$. Les $I_k\cap J_r, k\in\{1,\ldots,n\}, r\in\{1,\ldots,l\}$ sont des intervalles deux-à-deux disjoints, et on vérifie que $\sum_{k=1}^n\sum_{r=1}^l\text{long}_q(I_k\cap J_r)=\sum_{k=1}^n\text{long}_q(I_k)=\sum_{r=1}^n\text{long}_q(J_r)$.

Il est clair que $\text{long}_q:\mathcal{A}_q\to[0,1]$ est additive.

Il reste à montrer que long_q est sigma-additive.

Soient $I_1,\ldots,I_n\in\mathcal{P}$ des intervalles de $[q,q+1[$ deux-à-deux disjoints d'extrémités resprectives $a_k\leqslant b_k, 1\leqslant k\leqslant n$. Soit $\varepsilon>0$. Si $\varepsilon\leqslant 2^{k+1}(b_k-a_k)$, on pose $J_k=]a_k+\varepsilon\,2^{-k-1},b_k-\varepsilon\,2^{-k-1}[$. Si $\varepsilon>2^{k+1}(b_k-a_k)$, on pose $J_k=\varnothing$.

Les J_k sont deux-à-deux disjoints, $\bar{J_k}\subset I_k$, $\bigcup_{k=1}^n\bar{J_k}\subset\bigcup_{k=1}^n I_k$,

$\text{long}_q(\bigcup_{k=1}^n I_k)\leqslant\text{long}_q(\bigcup_{k=1}^n J_k)+\varepsilon(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n-1})\leqslant\text{long}_q(\bigcup_{k=1}^n J_k)+\varepsilon$

Donc $(*)$: $\forall A\in\mathcal{A}_q,\forall\varepsilon>0,\exists B_\varepsilon\in\mathcal{A}_q$ tel que $\overline{B_\varepsilon}\subset A$ et $\text{long}_q(A)\leqslant\text{long}_q(B_\varepsilon)+\varepsilon$

Soient $A_n\in\mathcal{A}_q, n\geqslant 0$ telle que $A_{n+1}\subset A_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}A_n=\varnothing$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists B_n\in\mathcal{A}_q$ tels que $\overline{B_n}\leqslant A_n$ et $\text{long}_q(A_n)\leqslant\varepsilon\,2^{-n-1}+\text{long}_q(B_n)$.

On pose $C_n=B_0\cap\cdots\cap B_n$. $C_n\in\mathcal{A}_q$, $C_{n+1}\subset C_n$, et $\overline{C_n}\subset\overline{B_n}\subset A_n$, on a donc $\bigcap_{n\geqslant 0}\overline{C_n}=\varnothing$.

$\text{long}_q(A_n\backslash C_n)\leqslant\sum_{k=0}^n\text{long}_q(A_k\backslash B_k)\leqslant\varepsilon$ donc $\text{long}_q(A_n)\leqslant\varepsilon+\text{long}_q(C_n)$.

Les $\overline{C_n}$ sont compacts et $\bigcap_{n\geqslant 0}\overline{C_n}=\varnothing$,

donc $\exists n_0\in\mathbb{N}:\bigcap_{n=0}^{n_0}\overline{C_n}=\varnothing$, donc $\overline{C_n}=\varnothing\ \forall n\geqslant n_0$, donc $C_n=\varnothing\ \forall n\geqslant n_0$

Donc $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geqslant N_0, \text{long}_q(A_n)\leqslant\varepsilon$, donc $\text{long}_q(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. $\square$

Théorème d'extension de Carathéodory. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. Soit $\mu_0:\mathcal{A}\to[0,\infty]$, que l'on suppose sigma-additive et sigma-finie.

$\forall X \subset E$, on pose $\mu(X) = \inf\left\{\sum_{n \geqslant 0} \mu_0(A_n)\,;\, A_n \in \mathcal{A} \text{ et } X \subset \bigcup_{n \geqslant 0} A_n\right\}$. Alors :

1. $\mu\colon \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ est une mesure extérieure

2. $\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = \mu_0(A)$.

3. $\sigma(A) \subset \mathcal{E}(\mu)$ (classe des μ-mesurables).

4. $\forall X \subset E, \exists B \in \sigma(A)$ tel que $X \subset B$ et $\mu(X) = \mu(B)$: propriété de *régularité extérieure* de μ.

Corollaire. $\mathcal{A}$ algèbre, $\mu_0\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ sigma-additive sigma-finie. Alors il existe une unique mesure positive μ qui est définie sur la tribue $\sigma(A)$ telle que $\mu(A) = \mu_0(A), A \in \mathcal{A}$.

Corollaire. La mesure de Lebesgue existe sur $\mathbb{R}$, ie :

$\exists l\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ mesure positive telle que $l([a, b]) = l([a, b[) = l(]a, b]) = l(]a, b[) = b - a$.

2013-11-20

Preuve du théorème.

1. $\mu(A) \leqslant \mu_0(A), A \in \mathcal{A}$, donc $\mu(\varnothing) = 0$

   Soient $B_n \subset X, n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. $\forall n \geqslant 0, \exists A_{n,p} \in \mathcal{A}, p \in \mathbb{N}$ tels que $B_n \subset \bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_{p,n}$ et $\sum_{p \in \mathbb{N}} \mu_0(A_{n,p}) \leqslant 2^{-n-1}\varepsilon + \mu(B_n)$.

   $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n,p \in \mathbb{N}} A_{n,p}$

   $\mu(B) \leqslant \sum_{n,p \in \mathbb{N}} \mu_0(A_{n,p}) \leqslant \varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n)$, donc μ est sigma-sous-additive, donc c'est une mesure extérieure.

2. On se donne $A \in \mathcal{A}$. Par définition $\mu(A) \leqslant \mu_0(A)$, on veut montrer l'inégalité contraire.

   Soient $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ tels que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

   Posons $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap A_k)$, $C_0 = B_0$ et $C_n = B_n \setminus B_{n-1}, n \geqslant 1$. Alors :

   $\bigcup_{k=0}^{n} C_k = B_n \in \mathcal{A}$, $C_n \in \mathcal{A}$ et $\bigcup_{n \geqslant 0} C_n = A$, C_n deux-à-deux disjoints.

   $\mu_0(A) \overset{\text{sigma-additivité de } \mu_0 \text{ sur A}}{=} \sum_{n \geqslant 0} \mu_0(C_n) \overset{\text{car } C_n \subset A_n}{\leqslant} \sum_{n \geqslant 0} \mu_0(A_n)$.

   En prenant l'infimum sur toutes les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possibles, on a que : $\mu_0(A) \leqslant \mu(A)$.

3. On sait que $\mathcal{E}(\mu)$ est une tribu, il suffit de montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}(\mu)$. On se donne $A \in \mathcal{A}$, on doit montrer que $(*)$: $\forall X \subset E,\ \mu(X) \geqslant \mu(X \cap A) + \mu(X \setminus A)$.

   Prouvons $(*)$: si $\mu(X) = \infty$, c'est trivial. On suppose $\mu(X) < \infty$, et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une suite $B_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ telle que $X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et $\varepsilon + \mu(X) \geqslant \sum_{n \geqslant 0} \mu_0(B_n)$.

   Donc $\varepsilon + \mu(X) \geqslant \sum_{n \geqslant 0} \mu_0(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(B_n \cap A) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(B_n \setminus A)$.

   $X \cap A \subset \bigcup_{n \geqslant 0} B_n \cap A$ et $X \setminus A \subset \bigcup_{n \geqslant 0} (B_n \setminus A)$. Donc $\varepsilon + \mu(X) \geqslant \mu(X \cap A) + \mu(X \setminus A)$,

   cela montre $(*)$ car ε est arbitrairement petit.

4. Soit $X \subset E$. Si $\mu(X) = \infty$, alors $\mu(X) = \mu(E) = \infty$, pas de problème. On suppose $\mu(X) < \infty$.

   $\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}$, il existe des $A_{n,p} \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ tels que $X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,p}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(A_{n,p}) \leqslant 2^{-p}\varepsilon + \mu(X)$.

   On pose $B_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,p} \in \sigma(\mathcal{A})$.

$X\subset B_p$. $\mu(B_p)\leqslant\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_{n,p})=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu_0(A_{n,p})\leqslant 2^{-p}+\mu(X)$.

On choisit $B=\bigcap_{p\in\mathbb{N}}B_p\in\sigma(A)$. $X\subset B$ et $\mu(B)\leqslant\mu(B_p)\leqslant 2^{-p}+\mu(X)$

$\forall p\in\mathbb{N}, \mu(B)-2^{-p}\leqslant\mu(X)\leqslant\mu(B)$, on a donc $\mu(X)=\mu(B)$. □

Théorème (Lebesgue). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. S'il est borné, on pose $\mathrm{long}(I)=b-a$, où $a=\inf I$ et $b=\sup I$ sont respectivement les extrémités gauche et droite de I. Si I est non borné, on pose $\mathrm{long}(I)=\infty$.

Pour tout $X\subset\mathbb{R}$, on pose $l(X)=\inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{long}(I_n)\,;I_n \text{ intervalles tels que } X\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n\right\}$. Alors :

1. $l:\mathcal{P}(\mathbb{R})\to[0,\infty]$ est la mesure extérieure de Lebesgue.
2. La tribu des l-mesurables est appellée *tribu Lebesguienne*, et est notée $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.
3. La restriction $l:\mathcal{L}(\mathbb{R})\to[0,\infty]$ est une mesure positive telle que $l(I)=\mathrm{long}(I)$ pour tout intervalle I.
4. $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{L}(\mathbb{R})$
5. $\forall X\subset\mathbb{R},\exists B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $X\subset B$ et $l(X)=l(B)$.

l restreinte à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est appellée *mesure de Lebesgue*. Elle est unique.

Preuve. $\mathcal{A}$ = les unions finies d'intervalles deux à deux disjoints (c'est une algèbre telle que $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

On a construit long : $\mathcal{A}\to[0,\infty]$ une fonction sigma-additive telle que $\forall I\subset\mathbb{R}$ intervalle, $\mathrm{long}(I)=b-a$.

On applique le théorème de Carathéodory. □

Remarque. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a le cardinal de $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ a le cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, mais n'est pas égal à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Ensemble non Lebesgue-mesurables. On admet l'axiome du choix. On note $x\sim y$ si $x-y\in\mathbb{Q}$, $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Par l'axiome du choix, $\forall C\in\mathbb{R}/\sim$, il existe $x_C\in C$. On a donc $C=x_C+\mathbb{Q}=\{y\in\mathbb{R}, y\sim x_C\}$. Il est toujours possible de choisir $x_C\in[0,1]$.

On pose $X=\{x_C, C\in\mathbb{R}/\sim\}\subset[0,1]$. Alors X n'est pas Lebesgue-mesurable, ie $X\notin\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Preuve. $\forall y\in\mathbb{R},\exists x\in X$ et $r\in\mathbb{Q}$ tels que $y=x+r$. Donc $\mathbb{R}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}X+r$.

On raisonne par l'absurde : on suppose que $X\in\mathcal{L}(\mathbb{R})$, alors $\exists r_0\in\mathbb{Q}$ tel que $l(r_0+X)>0$. Comme l est invariante par translation, on a que $l(X)=l(r_0+X)>0$.

$\forall r\neq r'$ dans $\mathbb{Q}$, $(X+r)\cap(X+r')=\varnothing$

$\bigcup_{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}(X+r)\subset[0,2]$, $0<\sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}l(r+X)=\sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}l(X)\leqslant 2$, absurde. □

Problème de la mesure de Ulam. Si on suppose l'hypothèse du continu (ie il n'y a pas d'ensemble E tel que $\mathrm{card}\,\mathbb{N}<\mathrm{card}\,E<\mathrm{card}\,\mathbb{R}$), alors il n'existe pas de mesure $\mu:\mathcal{P}([0,1])\to[0,1]$ telle que μ soit diffuse et $\mu([0,1])=1$. On ne peut donc pas prolonger la mesure de Lebesgue à tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Prop. Sans supposer l'axiome du choix, on ne peut pas construire d'ensemble non Lebesgue-mesurable.

V.2.b. Complétion d'un espace mesuré

Déf. $(E,\mathcal{E},\mu)$ espace mesuré. Un sous-ensemble $N\subset E$ est dit μ-néglibeable s'il existe $B\in\mathcal{E}$ tel que $\mu(B)=0$ et $N\subset B$. On note $\mathcal{N}_\mu$ la classe des ensembles μ-négligeables.

Exemple. Soit K l'ensemble de Cantor triadique. Alors K est un compact, $\operatorname{card} K = \operatorname{card} \mathbb{R}$, et $l(K) = 0$. $\forall N \subset K$, N est l-négligeable.

$\operatorname{card} \mathcal{N}_l = \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{R}) > \operatorname{card} \mathbb{R} = \operatorname{card} \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Fait (exercice). $\mathcal{N}_\mu$ est stable par union dénombrable.

Théorème (complétion d'un espace mesuré). Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. On note $\mathcal{N}_\mu$ la classe des μ-négligeables. On pose $\mathcal{E}^\mu = \sigma(\mathcal{E}, \mathcal{N}_\mu)$. Alors :

1. Si $B \in \mathcal{E}^\mu$, alors il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $A \subset B$ et $B \backslash A \in \mathcal{N}_\mu$.

2. Il existe une unique mesure $\bar{\mu} : \mathcal{E}^\mu \to [0, \infty]$ qui prolonge μ.

3. $\mathcal{N}_{\bar{\mu}} = \mathcal{N}_\mu$. On dit que $(E, \mathcal{E}^\mu, \bar{\mu})$ est le complété de $(E, \mathcal{E}, \mu)$.

   (le complété du complété est le complété).

Preuve. En exercice.

Soit $f : E \to [0, \infty]$ une fonction $\mathcal{E}$-mesurable. Alors $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\bar{\mu}$.

Théorème. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, $(E, \mathcal{E}^\mu, \bar{\mu})$ son complété.

1. Si $B \in \mathcal{E}^\mu$, $\exists A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ tels que

$$A_1 \subset B \subset A_2 \quad \text{et} \quad \mu(A_2 \setminus A_1) = 0$$

2. Soit $h : E \to [0, \infty]$, $\mathcal{E}^\mu$-mesurable. Il existe $h_1, h_2 : E \to [0, \infty]$ $\mathcal{E}$-mesurables telles que :

$$h_1 \leqslant h \leqslant h_2$$

$$\int h_1 \, \mathrm{d}\mu = \int h_2 \, \mathrm{d}\mu = \int h \, \mathrm{d}\bar{\mu}$$

$$\mu(\{h_1 < h_2\}) = 0$$

3. Pareil pour les fonctions intégrables.

4. $h : E \to \mathbb{C}$, $\mathcal{E}^\mu$-mesurable. $\exists f, g : E \to \mathbb{C}$ telles que f est $\mathcal{E}$-mesurable, g est $\mathcal{E}^\mu$-mesurable, $h = f + g$ et $\{g \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$.

Preuve. En exercice.

V.2.c. Complétion/extension/approximation

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espac mesuré. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre telle que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$.

On suppose que μ est sigma-finie sur $\mathcal{A}$: $\exists E_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ telle que $\mu(E_n) < \infty$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$.

$\forall X \subset E$, on pose $\mu^*(X) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \, ; A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \text{ tels que } X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$.

Théorème. Sous les hypothèses précédentes (notamment μ est sigma-finie),

1. $\mathcal{N}_\mu = \{N \subset E : \mu^*(N) = 0\}$

   $(E, \mathcal{E}^\mu, \bar{\mu}) = (E, \mathcal{E}(\mu^*), \mu^*)$

2. Soit $N \in \mathcal{N}_\mu$, $\varepsilon > 0$. Alors il existe $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ tels que les A_n sont deux-à-deux disjoints et $N \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \varepsilon$.

3. Soit $B \in \mathcal{E}^\mu = \mathcal{E}(\mu^*)$, soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $B_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ tels que les B_n sont disjoints deux-à-deux, $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et $\bar{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus B\right) < \varepsilon$

4. Soit $B \in \mathcal{E}^\mu$ tel que $\mu(B) < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$

   $(A \triangle B = (B \backslash A) \cup (A \backslash B)$, $\mathbf{1}_{A\triangle B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|)$

Preuve. À faire (cf polycopié).

V.2.d. Complément

Déf. Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(E', \mathcal{E}')$ deux espaces mesurables, soit $\varphi \colon E \to E'$. On dit que f est un *isomorphisme d'espaces mesurables* si φ est bijective, φ est $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ est mesurable, et si φ^{-1} est $(\mathcal{E}', \mathcal{E})$-mesurble.

Déf. $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

- Il est dit *séparable* s'il exist eune suite $A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{E} = \sigma(\{A_n, n \in \mathbb{N}\})$
- Il est dit *séparé* si $\forall x, y \in E$ avec $x \neq y$, il existe $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $x \in A, y \in B$ et $A \cap B = \varnothing$

Théorème. On suppose que $(E, \mathcal{E})$ est séparable et séparé. Alors :

1. $\Delta = \{(x, x) \in E \times E; x \in E\} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$.
2. $\forall x \in E, \{x\} \in \mathcal{E}$
3. Il existe un ensemble $C \subset \mathbb{R}$ tel que $(E, \mathcal{E})$ est isomorphe à $(C, \mathcal{B}(C))$

   (où $\mathcal{B}(C) = \{C \cap D; D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \sigma(\text{topologie trace sur } C))$

Attention. $C \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Conséquence. Toute tribu séparable et séparée est la tribu Borélienne d'une topologie séparable et séparée.

Théorème d'isomorphisme de Borel. Soit (E, d) une espace métrique séparable complet. Soit $B \in \mathcal{B}(E)$ un borélien. Alors,

- Ou bien B est dénombrable
- Ou bien $(B, \mathcal{B}(B))$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2013-11-27

V.3. Construction par des fonctionnelles additives

V.3.a. Intégrales de Daniell-Stone

Déf. Soit E un ensemble non vide. On se donne $\mathcal{L}$ une classe de fonctions $f: E \to \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{L}$ est une *classe de Stone* si :

a) $f, g \in \mathcal{L} \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}$ et $f \wedge g \in \mathcal{L}$;

b) $\forall f \in \mathcal{L}, \forall c \in \mathbb{R}^+$, $c f \in \mathcal{L}$ et $c \wedge f \in \mathcal{L}$;

c) $\forall f, g \in \mathcal{L}$, si $f \geqslant g$ alors $f - g \in \mathcal{L}$.

Déf. Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{L}$ une classe de Stone de fonctions $f: E \to \mathbb{R}$. Soit $I: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$. On dit que I est une *intégrale de Daniell* si :

a) $\forall f, g \in \mathcal{L},\ I(f+g) = I(f) + I(g)$;

b) $\forall f \in \mathcal{L}, \forall c \in \mathbb{R}_+,\ I(c f) = c\, I(f)$;

c) $\forall f, g \in \mathcal{L}$ telle que $f \geqslant g$, alors $I(f) \geqslant I(g)$;

d) Soit $h \in \mathcal{L}$ et $h_n \in \mathcal{L}, n \in \mathbb{N}$ telles que $h_n \leqslant h_{n+1}$ et $\lim_{n\to\infty} h_n = h$ ponctuellement, alors : $\lim_{n\to\infty} I(h_n) = I(h)$.

Théorème de Daniell-Stone. Soit E non vide, $\mathcal{L}$ une classe de Stone, I une intégrale de Daniell. On note $\mathcal{C}$ la classe des sous-ensembles de E de la forme $\{f > a\}, a \in \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathcal{L}$. On note $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Alors :

1. Il existe une mesure positive $\mu: \mathcal{E} \to [0, \infty]$ telle que $\forall f \in \mathcal{L}$, f est $\mathcal{E}$-mesurable, μ-intégrable et $I(f) = \int_E f\, \mathrm{d}\mu$.

2. Si $\nu: \mathcal{E} \to [0, \infty]$ satisfait aussi les conditions du (1), on a : $\forall C \in \mathcal{C}, \mu(C) = \nu(C)$.

Exemple. On suppose que E admet deux points distincts x_0 et x_1. Soit $\mathcal{L} = \{f: E \to \mathbb{R}: f$ est nulle sur $E \setminus \{x_0\}\}$, $\mathcal{L}$ est une classe de Stone. On pose $I(f) = f(x_0)$, I est une intégrale de Daniell. I est représenté par $\mu = \delta_{x_0}$ et $\nu = \delta_{x_0} + \delta_{x_1}$.

Preuve du théorème. Soit $X \subset E$ et $f_n \in \mathcal{L}^+, n \in \mathbb{N}$. ($\mathcal{L}^+ = \{f \in \mathcal{L}: f \geqslant 0\}$ est l'ensemble des fonctions positives de $\mathcal{L}$, non vide car $0 \in \mathcal{L}^+$).

On note : $(f_n)_{n\geqslant 0} \succcurlyeq X$ (lire « domine X ») si :

1. $f_n \leqslant f_{n+1}$

2. $\sup_{n\geqslant 0} f_n \geqslant \mathbf{1}_X$

Remarquons que $\lim_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geqslant 0} f_n : E \to [0, \infty]$, cette fonction limite n'est pas nécessairement dans $\mathcal{L}$.

On a $I(f_n) \leqslant I(f_{n+1})$, donc $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \sup_{n\geqslant 0} I(f_n)$ exuste dans $[0, \infty]$.

On pose $\mu(X) = \inf\{\lim_{n\to\infty} I(f_n)\, ;\, (f_n)_{n\geqslant 0} \succcurlyeq X\}$.

Montrons que $\mu: \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ est une mesure extérieure :

- $I(0) = 0$, prenons $f_n = 0$, $(f_n)_{n\geqslant 0} \succcurlyeq \varnothing$, donc $\mu(\varnothing) = 0$

- Soit $X \subset E$ et $A_p \subset E, p \in \mathbb{N}$ tels que $X \subset \bigcup_{p\geqslant 0} A_p$.

  $\forall \varepsilon > 0, \exists \left(f_n^{(p)}\right)_{n\geqslant 0} \succcurlyeq A_p$ telles que : $\lim_{n\to\infty} I\left(f_n^{(p)}\right) \leqslant \mu(A_p) + 2^{-p-1}\varepsilon$.

  On pose $g_n = \sum_{0\leqslant p\leqslant n} f_n^{(p)} \subset \mathcal{L}^+$. On vérifie facilement que $(g_n)_{n\geqslant 0} \preccurlyeq X$.

  $I(g_n) = \sum_{0\leqslant p\leqslant n} I\left(f_n^{(p)}\right) \leqslant \sum_{p\geqslant 0} \lim_{n\to\infty} I\left(f_n^{(p)}\right) \leqslant \varepsilon + \sum_{p\geqslant 0} \mu(A_p)$.

  Donc $\mu(X) \leqslant \varepsilon + \sum_{p\geqslant 0} \mu(A_p)$ $\forall \varepsilon > 0$, donc μ est une mesure extérieure.

On note $\mathcal{E}(\mu)$ la tribu des μ-mesurables. μ restreinte à $\mathcal{E}(\mu)$ est une mesure positive.

On montre que $\forall f \in \mathcal{L}^+$, f est $\mathcal{E}(\mu)$-mesurable.

Par un lemme du cours, il sufit de vérifier que $\forall f \in \mathcal{L}^+$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$, on a : $(*)$

$$\forall X \subset E, \mu(X) \geqslant \mu(X \cap \{f \leqslant a\}) + \mu(X \cap \{f \geqslant b\})$$

Preuve du $(*)$. Soit $(g_n)_{n \geqslant 0} \succcurlyeq X$.

On pose $h = \frac{1}{b-a}((b-a) \wedge (f-a)_+) = \frac{1}{b-a}(b \wedge f - a \wedge f) \in \mathcal{L}^+$

On remarque que $\mathbf{1}_{\{f \geqslant b\}} \leqslant h \leqslant \mathbf{1}_{\{f \leqslant a\}}$

On pose $f_n = g_n \wedge h \in \mathcal{L}^+$, on a $f_n \leqslant f_{n+1}$; et $h_n = g_n - g_n \wedge h \in \mathcal{L}^+$

(on a $h_n = (g_n - h)\mathbf{1}_{\{g_n \geqslant h\}}$, d'où $h_n \leqslant h_{n+1}$)

On voit que $(f_n)_{n \geqslant 0} \succcurlyeq X \cap \{f \geqslant b\}$ et $(h_n)_{n \geqslant 0} \succcurlyeq X \cap \{f \leqslant a\}$; $I(g_n) = I(f_n) + I(h_n)$.

$\lim_{n \to \infty} I(g_n) \geqslant \lim_{n \to \infty} I(f_n) + \lim_{n \to \infty} I(h_n) \geqslant \mu(X \cap \{f \geqslant b\}) + \mu(X \cap \{f \leqslant a\})$,

on passe à l'infimum en $(g_n)_{n \geqslant 0} \succcurlyeq X$, donc on obtient $(*)$.

Fait 1. $\forall X \subset E, \forall f \in \mathcal{L}^+, f \geqslant \mathbf{1}_X \Rightarrow I(f) \geqslant \mu(X)$

(clair : $f_n = f, n \in \mathbb{N}$, on a $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \succcurlyeq X$).

Fait 2. $\forall X \subset e, \forall f \in \mathcal{L}^+, f \leqslant \mathbf{1}_X \Rightarrow I(f) \leqslant \mu(X)$

Preuve. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \succcurlyeq X$, et $f \in \mathcal{L}^+$ telle que $f \leqslant \mathbf{1}_X$.

On pose $f_n = g_n \wedge f \in \mathcal{L}^+$. $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ ponctuellement. Par le point (*d.*) de la définition d'une intégrale de Daniell : $I(f) = \lim_{n \to \infty} I(f_n)$.

Or $f_n \leqslant g_n$, donc $I(f_n) \leqslant I(g_n)$, donc $I(f) \leqslant \lim_{n \to \infty} I(g_n)$. En passant à l'infimum sur toutes les suites de fonction $(g_n)_{n \geqslant 0} \succcurlyeq X$, on obtient $I(f) \leqslant \mu(X)$.

Preuve de la représentation. Soit $f \in \mathcal{L}^+$. $\forall r \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_r = r \wedge f \in \mathcal{L}^+$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varepsilon \mathbf{1}_{\{f \geqslant n\varepsilon\}} \geqslant \underbrace{f_{(n+1)\varepsilon} - f_{n\varepsilon}}_{\in \mathcal{L}^+} \geqslant \varepsilon \mathbf{1}_{\{f \geqslant (n+1)\varepsilon\}}$

Par les faits (1) et (2), on en déduit : $\varepsilon \mu(\{f \geqslant n\varepsilon\}) \geqslant I(f_{(n+1)\varepsilon} - f_{n\varepsilon}) \geqslant \mu(\{f \geqslant (n+1)\varepsilon\})$.

Comme $f_{(n+1)\varepsilon} - f_{n\varepsilon} \in \mathcal{L}^+$, ce sont des fonctions $\mathcal{E}(\mu)$-mesurables positiives.

$\varepsilon \mu(\{f \geqslant n\varepsilon\}) \geqslant \int_E (f_{(n+1)\varepsilon} - f_{n\varepsilon}) \, \mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon \mu(\{f \geqslant (n+1)\varepsilon\})$

$I(f_{(n+1)\varepsilon} + f_{n\varepsilon}) \geqslant \varepsilon \mu(\{f \geqslant (n+1)\varepsilon\}) \geqslant \int_E (f_{(n+2)\varepsilon} - f_{(n+1)\varepsilon}) \, \mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon \mu(\{f \geqslant (n+2)\varepsilon\}) \geqslant I(f_{(n+3)\varepsilon} - f_{(n+2)\varepsilon}) \geqslant \cdots$

$I(f_{n\varepsilon}) \geqslant \int_E (f_{(n+1)\varepsilon} - f_\varepsilon) \, \mathrm{d}\mu \geqslant I(f_{(n+2)\varepsilon} - f_{2\varepsilon})$ en sommant les inégalités précédentes.

$\lim\uparrow f_{n\varepsilon} = f$, donc $I(f_{n\varepsilon}) \to I(f)$, $I(f_{(n+2)\varepsilon} - f_{n\varepsilon}) \to I(f - f_{2\varepsilon})$

Par convergence monotone pour μ, $\int_E (f_{(n+1)\varepsilon} - f_{n\varepsilon}) \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow{\uparrow} \int_E (f - f_\varepsilon) \, \mathrm{d}\mu$

$$\forall \varepsilon > 0, I(f) \geqslant \int_E (f - f_\varepsilon) \, \mathrm{d}\mu \geqslant I(f - f_{2\varepsilon})$$

$f - f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{\uparrow} f$, donc $\int_E (f - f_\varepsilon) \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{\uparrow} \int_E f \, \mathrm{d}\mu$

et $f - f_{2\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{\uparrow} f$, donc $\int_E (f - f_{2\varepsilon}) \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{\uparrow} I(f)$

Donc $\forall f \in \mathcal{L}^+$, $I(f) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

Maintenant pour $f \in \mathcal{L}$: $0 \wedge f \in \mathcal{L}$, $0 \wedge f \leqslant f$ donc $f - 0 \wedge f = \max(0, f) = f_+ \in \mathcal{L}^+$

$f_- = f_+ - f \geqslant 0$, donc $f_- \in \mathcal{L}^+$.

$I(f + f_-) = I(f_+) = I(f) + I(f_-)$, donc $I(f) = I(f_+ - f_-) = \int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_E f_- \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.

Il faut encore monter que $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{E}(\mu)$:

Soit $f \in \mathcal{L}$ et $a > 0$, on doit montrer que $\{f > a\} \in \mathcal{E}(\mu)$.

On pose $h_n = 2^n((a + 2^{-n}) \wedge f - a \wedge f) \in \mathcal{L}^+$, $h_n = 2^n(2^{-n} \wedge (f - a)_+) \to \mathbf{1}_{\{f > a\}}$

Comme les h_n sont $\mathcal{E}(\mu)$-mesurables, $\mathbf{1}_{\{f > a\}}$ aussi, donc $\{f > a\} \in \mathcal{E}(\mu)$

$I(h_n) = \int h_n \,\mathrm{d}\nu = \int h_n \,\mathrm{d}\mu \Rightarrow \nu(\{f > a\}) = \mu(\{f > a\})$, on a donc le point (2). □

V.3.b. Application au théorème de Riesz sur les formes positives

Soit (E, d) un espace métrique localement compact séparable. Notons $C_c(E) = \{f : E \to \mathbb{R}$ continues à support compact$\}$, et $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Lemme. Soit $K \subset E$ compact. $\exists g_k \in C_c(E)$ telle que $\mathbf{1}_K \leqslant g_k \leqslant 1$

Preuve. $\exists K_n \subset E, n \in \mathbb{N}$ une suite de compacts tels que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$,

et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathring{K}_n = E$.

$K \subset \bigcup_{n \geqslant 0} \mathring{K}_n$. Il existe n_0 tel que $K \subset \mathring{K}_{n_0}$. On pose $F = E \setminus \mathring{K}_{n_0}$, F est fermé.

$\mathrm{dist}(K, F) = \inf_{y \in K} d(y, F) = r > 0$; on pose $g_k = 1 \wedge \left(\frac{d(\cdot, F)}{r}\right)$ □

Lemme de Dini. Soit $f_n \in C_c(E), n \in \mathbb{N}$ telles que $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x), x \in E$ et $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ ponctuellement. Alors $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Preuve. $\|f_{n+1}\|_\infty \leqslant \|f_n\|_\infty$. On pose $c = \lim_{n \to \infty} \|f_n\|_\infty$. Supposons $c > 0$:

$\exists x_n \in \mathrm{support}(f) = K$ telle que $f_n(x_n) \geqslant c$. On extrait une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers x.

Comme $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{\downarrow} 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n_0}(x) \leqslant \frac{c}{3}$. $\exists \delta > 0 : \forall y \in B(x, \delta), |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| < \frac{c}{3}$,

donc $0 \leqslant f_{n_0}(y) \leqslant \frac{2c}{3}$. Donc $\forall y \in B(x, \delta)$, $\forall n \geqslant 0$, $0 \leqslant f_n(y) \leqslant \frac{2c}{3}$. Il existe une infinité de n tels que $x_n \in B(x, \delta)$ et $n \geqslant n_0$, ce qui implique $f_n(x_n) \leqslant \frac{2c}{3}$, c'est absurde.

Théorème de Riesz. Soit (E, d) localement compact séparable. Soit $\phi : C_c(E) \to \mathbb{R}$ telle que :

a) ϕ est additive : $\forall f, g \in C_c(E)$, $\forall c \in \mathbb{R}_+$ $\phi(f + c\,g) = \phi(f) + c\,\phi(g)$;

b) ϕ est positive : $\forall f \in C_c(E)$ telle que $f \geqslant 0$, on a $\phi(f) \geqslant 0$.

Alors : il existe une unique mesure positive $\mu : \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$ telle que $\forall f \in C_c(E), \phi(f) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu$. De plus, μ est une mesure de Radon, elle est donc régulière extérieurement pour les ouverts et intérieurement pour les compacts.

Preuve. $C_c(E)$ est une classe de Stone (facile).

ϕ satisfait les hypothèses $(a), (b)$ et (c) d'une intégrale de Daniell. Il faut montrer le point (d) :

On se donne $h, h_n \in C_c(E), n \in \mathbb{N}$ telles que $h_n \leqslant h_{n+1}$ et $\lim_{n \to \infty} h_n = h$ ponctuellement.

On pose $f_n = h - h_n \geqslant 0$, $0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$ et $f_n \to 0$ ponctuellement. Par Dini, $\|f_n\|_\infty \to 0$.

On note $K = \mathrm{support}\, h$. Il existe $g_k \in C_c(E)$ telle que $\mathbf{1}_K \leqslant g_k \leqslant 1$.

$0 \leqslant f_n \leqslant \|f_n\|_\infty\, g_K$, $0 \leqslant \phi(f_n) \leqslant \|f_n\|_\infty\, \phi(g_k) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, donc $\lim \phi(h_n) = \phi(h)$, donc ϕ est bien une intégrale de Daniell.

Soit K un compact de E. $K = \{f > 0\}$ où $f = d(\cdot, E \setminus K)$ (à peu près...), donc les compacts sont dans $\mathcal{C} = \{\{f > a\}\,;\, f \in C_c(E), a \in \mathbb{R}_+\}$

$\phi(f) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu$, $\mu \colon \mathcal{B}(E) \to [0, \infty]$.

Si ν représente aussi ϕ, $\nu(K) = \mu(K)$ pour tout K compact. Donc par unicité du prolongement des mesures, $\mu = \nu$.

Montrons que μ est de Radon : Soit K in compact de E. Il existe $g_k \in C_c(E)$ tq $\mathbf{1}_k \leqslant g_k \leqslant 1$. $\mu(K) \leqslant \int_E g_k \,\mathrm{d}\mu \leqslant \phi(g_k) < \infty$, donc μ est de Radon. □

2013-12-02

VI. Le modèle probabiliste

VI.1. Introduction

Déf. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. C'est un *espace de probabilités* si $\mu(E) = 1$ et μ est une mesure (ou loi) de probabilités. Les espaces de probabilités sont notés $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Cet espace modélise un phénomène aléatoire de la manière suivante :

- Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles du phénomène aléatoire.
- $A \in \mathcal{F}$ est un événement

  A est décrit par tous les résultats possibles qui le réalisent (pour $\omega \in \Omega$, $\omega \in A$ signifie « ω réalise l'événement A »)
- $\mathbb{P} \colon \mathcal{F} \to [0, 1]$ est une mesure de probabilités

  Si $A \in F$, $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité que A se produise

Exemple. On jette un dé cubique équilibré. On s'intéresse aux chiffres sur la face supérieure après le lancer.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

« le résultat est pair » correspond à l'évènement $\{2, 4, 6\} = A$.

$\mathbb{P}$ est la mesure uniforme sur Ω, ie $\mathbb{P}(\{k\}) = 1/6$ (probabilité que le résultat soit k est $1/6$).

Probabilité que le résultat soit pair : c'est $\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 3/6 = 1/2$.

Vocabulaire. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.

- $\mathcal{F}$ est la tribu des événements,
- $A \in \mathcal{F}$ est un événement.
- « $\omega \in A$ » se lit « ω réalise A ».
- $\varnothing$ est l'événement impossible, Ω est l'événement certain.
- $\Omega \setminus A$ est l'événement contraire de A.
- $\mathbb{P}$-presque surement signifie $\mathbb{P}$-presque partout

- $\mathbb{P}(A)=1$ se dit « A est presque sûr »
- Soient $A,B\in\mathcal{F}$, $A\cup B$ est l'événement A ou B, $A\cap B$ est l'événement A et B.

  On note alors $\mathbb{P}(A\,\text{ou}\,B)$ ou $\mathbb{P}(A\,\text{et}\,B)$.

  On écrit parfois $\mathbb{P}(A\,\text{et}\,B)=\mathbb{P}(A;B)$

On sait que $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

Cela peut se prouver facilement avec $\mathbf{1}_{A\cup B}=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_{A\cap B}$, égalité que l'on intègre contre $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cup B) &= \int_\Omega \mathbf{1}_{A\cup B}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\\ &= \int_\Omega \mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mathbb{P}+\int_\Omega \mathbf{1}_B\,\mathrm{d}\mathbb{P}-\int_\Omega \mathbf{1}_{A\cap B}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\end{aligned}$$

Lemme (formule du crible). Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soient $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right)=\sum_{\varnothing\subset J\subset\{1,\ldots,n\}}(-1)^{\#J+1}\,\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)$$

Preuve. $\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(1+x_j)=\sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}}\prod_{j\in J}x_j$ (démonstration par récurrence), avec pour convention que $\prod_{j\in\varnothing}x_j=1$.

On pose $A=\bigcup_{1\leqslant j\leqslant n}A_j$, $1-\mathbf{1}_A=\mathbf{1}_{\Omega\backslash A}=\mathbf{1}_{\bigcap_{j=1}^n A_j}=\prod_{j=1}^n(1-\mathbf{1}_{A_j})$

$A=\sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}}(-1)^{\#J}\prod_{j\in J}\mathbf{1}_{A_j}=1+\sum_{\varnothing\neq J\subset\{1,\ldots,n\}}(-1)^{\#J}\prod_{j\in J}\mathbf{1}_{A_j}$,

puis on intègre contre $\mathbb{P}$. $\square$

VI.2. La suite

VI.2.a. Vocabulaire probabiliste

Déf. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable. Une application $X:\Omega\to E$ qui est $(\mathcal{F},\mathcal{E})$-mesurable est appellée *variable aléatoire* $(\mathcal{F},\mathcal{E})$-mesurable.

Notation.

- Variable aléatoire : abbr. V.A.

  Elles sont notées : $X,Y,Z,\ldots$ (majuscules scriptes de la fin de l'alphabet)

- $\{X\in C\}=X^{-1}(C)=\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in C\}$

  On se débarasse dès que possible des accolades inutiles.

  Par exemple : $X,Y:\Omega\to E$ deux V.A. $(\mathcal{F},\mathcal{E})$-mesurables, on note :

  $\mathbb{P}(X\in C;Y\in D)=\mathbb{P}(X^{-1}(C)\cap Y^{-1}(D))$

  $\mathbb{P}(X\notin C)=\mathbb{P}(\Omega\backslash X^{-1}(C))=\mathbb{P}(X^{-1}(E\backslash C))$

- Lorsque $E=[0,\infty],\mathbb{R},[-\infty,\infty],\mathbb{C},\mathbb{R}^n$, etc. on dit que X est $\mathcal{F}$-mesurable pour dire que X est $(\mathcal{F},\mathcal{B}(E))$-mesurable.

Intuitivement, une variable aléatoire est une fonction qui extrait une certaine information d'un phénomène aléatoire (exemple : somme de deux dés).

Déf. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilités, soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable. Soit $X:\Omega\to E$ une V.A. $(\mathcal{F},\mathcal{E})$-mesurable. Alors :

- Sa *loi* est la mesure image de X par $\mathbb{P}$. C'est une mesure de probabilités :

$$\begin{aligned} &\mu_X:\mathcal{E}\to[0,\infty] \\ \forall B\in\mathcal{E},\ &\mu_X(B)=\mathbb{P}(X^{-1}(B)) \\ \text{noté :}\ &\mu_X(B)=\mathbb{P}(X\in B) \end{aligned}$$

- Si $E=[0,\infty]$ et $\mathcal{E}=\mathcal{B}([0,\infty])$, alors l'*espérance* de X est son intégrale contre $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{E}[X] \ = \ \int_\Omega X\,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

  (en anglais : expectation)

- Si $E=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, X est dite $\mathbb{P}$-intégrable (ou intégrable) si $\mathbb{E}[\ |X|\ ]<\infty$. Dans ce cas, $\mathbb{E}[X]=\int_\omega X\,\mathrm{d}\mathbb{P}$.

Rappel. $A\in\mathcal{F}$, $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable. $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A]=\int_\Omega \mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mathbb{P}=\mathbb{P}(A)$.

Théorème de transfert. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilités, $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable, soit $X:\Omega\to E$ une V.A. $(\mathcal{F},\mathcal{E})$-mesurable, et soit $f:E\to[0,\infty]$ $\mathcal{E}$-mesurable. Alors :

$$\mathbb{E}[f(X)] \ = \ \int_E f(x)\,\mu_X(\mathrm{d}x)$$

où μ_X est la loi de X sous $\mathbb{P}$.

Si $E=\mathbb{C}$ et $\mathcal{E}=\mathcal{B}(\mathbb{C})$, et si X est intégrable (ie $\mathbb{E}[|X|]=\int_\mathbb{C}|x|\mu_X(\mathrm{d}x)<\infty$). Alors :

$$\mathbb{E}[X] \ = \ \int_\mathbb{C} x\,\mu_X(\mathrm{d}x)$$

« Philosophie ». Sauf quand on fait des constructions, on ne cherche pas à connaître $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ en détail.

VI.2.b. Inégalités usuelles

$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espace de proba fixé. Toutes les V.A. mentionnées sont définies dessus.

Inégalité de Jensen. Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe, soit X une V.A. réelle $\mathcal{F}$-mesurable. On suppose X et $\varphi(X)$ intégrables. Alors :

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \ \leqslant \ \mathbb{E}[\varphi(X)]$$

Déf. Soit X une V.A. complexe $\mathcal{F}$-mesurable. Soit $p\in\,]0,\infty[$. On dit que X admet un *moment d'ordre* p si $\mathbb{E}[|X|^p]<\infty$.

Si $p\in\mathbb{N}^*$ et si X admet un moment d'ordre p, alors son moment d'ordre p est l'espérance de $\mathbb{E}[X^p]$.

Si $p\geqslant 1$, $x\in\mathbb{R}\mapsto|x|^p$ est convexe. Si $0<p_2\leqslant p_1$, alors $\mathbb{E}[|X|^{p_2}]^{p_1/p_2}\leqslant\mathbb{E}[|X|^{p_1}]$.

Si X admet un moment d'ordre 2 (également dit est de carré intégrable), alors elle est intégrable, et on a $\mathbb{E}[|X|]\leqslant\sqrt{\mathbb{E}[|X|^2]}$.

Inégalité de Hölder. Soit $p>1$ et q son exposant conjugué. Soit X,Y deux V.A. complexe $\mathcal{F}$-mesurables. Alors :

$$\mathbb{E}[|XY|] \leqslant (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}(\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}$$

Inégalité de Minkowski. Pour $p\geqslant 1$,

$$(\mathbb{E}[|X+Y|^p])^{1/p} \leqslant \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}+\mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p}$$

Inégalité de Cauchy-Shwarz. Si X,Y ont un module d'ordre 2, alors :

$$|\mathbb{E}[XY]| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]}$$

Inégalité triangulaire. Si X intégrable,

$$|\mathbb{E}[X]| \leqslant \mathbb{E}[|X|]$$

Lemme. Soit Z une V.A. positive $\mathcal{F}$-mesurable. Alors, si Z admet un moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{P}(Z>0) \geqslant \frac{(\mathbb{E}[Z])^2}{\mathbb{E}[Z^2]}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[Z\,\mathbf{1}_{\{Z>0\}}]\\
&\leqslant \leqslant\sqrt{\mathbb{E}[Z^2]}\,\sqrt{\mathbb{E}\big[\mathbf{1}^2_{\{Z\geqslant 0\}}\big]}\\
&= \sqrt{\mathbb{E}[Z^2]}\,\sqrt{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Z\geqslant 0\}}]}\\
&= \sqrt{\mathbb{E}[Z^2]}\,\sqrt{\mathbb{P}(Z>0)}
\end{aligned}$$

□

Lemme. Inégalité de type « Markov ». Soit $\phi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ croissante telle que $\phi(a)>0$ dès que $a>0$. Soit X une V.A. positive $\mathcal{F}$-mesurable. Alors :

$$\mathbb{P}(X\geqslant a) \leqslant \frac{1}{\phi(a)}\mathbb{E}[\phi(X)]$$

Preuve. (idée à retenir)

$\forall a>0, \mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}\leqslant\frac{1}{\phi(a)}\phi(X)$. On intègre : $\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant\mathbb{E}\Big[\frac{\phi(X)}{\phi(a)}\Big]=\frac{1}{\phi(a)}\mathbb{E}[\phi(X)]$. □

Exemples d'application.

- $\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant\frac{1}{a}\,\mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant\dfrac{1-\mathbb{E}[e^{-aX}]}{1-e^{-a}}$
- $\mathbb{P}(X\leqslant a)\leqslant e^a\,\mathbb{E}[e^{-X}]$

Déf. Soit X une V.A. réelle $\mathcal{F}$-mesurable. On suppose qu'elle admet un moment d'ordre 2 (elle est de carré intégrable), ie $\mathbb{E}[|X|^2]<\infty$. Alors sa *variance*, notée $\mathrm{var}(X)$, est la quantité :

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$$

Son *écart-type*, noté $\sigma(X)$, est $\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{var}(X)}$.

Fait. $\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ (identité de König).

Inégalité de (Bienaymé-)Tchébychev. Soit X une V.A. réelle qui admet un moment d'ordre 2. $\forall a \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > a) \leqslant \frac{\operatorname{var}(X)}{a^2}$$

Preuve. Markov appliqué à $Y = |X - \mathbb{E}[X]|$ et $\phi(a) = a^2$. $\square$

2013-12-04

VI.3. Caractérisation des lois réelles et vectorielles

VI.3.a. Fonctions de répatition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.

Déf. Soit X une variable aléatoire réelle $\mathcal{F}$-mesurable. Sa *fonction de répartition* est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Elle ne dépend que de la loi de X : $F_X(x) = \mu_X(]-\infty, x])$.

Propriétés.

1. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

2. F_X est continue à droite, croissante

   $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-) = \mu_X(\{x\})$

   La loi de X est diffuse $\Leftrightarrow$ F_X est continue.

3. La loi de X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\Leftrightarrow$ F_X est absolument continue. Dans ce cas, la densité est F'_X qui existe Lebesgue-presque partout.

$$\mu_X = F'_X l$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} F'_X(y) \,\mathrm{d}y$$

   Si $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, alors:

$$\mathbb{E}[g(x)] = \int_{\mathbb{R}} F'_X(y)\, g(y) \,\mathrm{d}y$$

Déf. $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *absolument continue* si $\forall \varepsilon > 0, \forall a < b, \exists \delta > 0 : \forall a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n \leqslant b, (\sum_{k=1}^{n} b_k - a_k \leqslant \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(b_k) - f(a_k) \leqslant \varepsilon)$

Exemple. Si F est lipschitzienne, alors elle est absolument continue.

Théorème de différentiation de Lebesgue. F est absolument continue $\Leftrightarrow$ (1) F est dérivable Lebesgue-presque partout et (2) $\forall a < b, F(b) - F(a) = \int_{[a,b]} F'(x) \,\mathrm{d}x$.

Proposition. Soient X, Y deux variables aléatoire réelles $\mathcal{F}$-mesurables. <u>Alors :</u> $F_X = F_Y \Leftrightarrow X$ et Y ont même loi $\Leftrightarrow \mu_X = \mu_Y$.

Preuve. On note $\mathcal{P} = \{\mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$.

$F_X = F_Y \Rightarrow \mu_X$ et μ_Y coincident sur $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mu_X = \mu_Y$ car $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par le théorème d'unicité du prolongement des mesures. $\square$

Déf. Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire réelle $\mathcal{F}$-mesurable. Sa loi est dite *uniforme sur I* si $\mu_X = \dfrac{1}{l(I)} l(\cdot \cap I)$. ($l$ est la mesure de Lebesgue).

$$\mathbb{P}(X \in B) = \frac{l(B \cap I)}{l(I)}$$

Cela implique que X est à valeurs dans I presque-surement ($\mathbb{P}(X \in I) = 1$).

Proposition. On se donne une fonction $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on suppose croissante, continue à droite, telle que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. Pour tout $y \in]0,1[$, on pose $G(y) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) > y\}$. On appelle $G:]0,1[\to \mathbb{R}$ le *pseudo-inverse continu à droite* de F. Alors :

1. G est bien continue à droite, croissante. Si F est continue strictement croissante, alors G est sa réciproque.

2. Soit U une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable qui est une loi uniforme sur $]0,1[$.

   On pose $X = G(U) : \Omega \to \mathbb{R}$, c'est une V.A. $\mathcal{F}$-mesurable et sa fonction de répartition est F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Preuve.

1. En exercice

2. On vérifie que $\forall x \in \mathbb{R}, [0, F(x)[\subset G^{-1}(]-\infty, x]) \subset [0, F(x)]$ (en exercice).

   $A = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(G(U) \leqslant x) = \mathbb{P}(U \in G^{-1}(]-\infty, x]))$.

   Comme la loi de U est diffuse, $A = l(]0,1[\cap G^{-1}(]-\infty, x])) = l([0, F(x)]) = F(x)$. $\square$

Intérêt pratique. Des logiciels fournissent des V.A. uniformes sur $[0,1]$. Pour simuler une V.A. X de loi μ, on pose $G(y) = \inf\{x \in \mathbb{R}: \mu(]-\infty, x]) > y\}$, $y \in]0,1[$, et on pose $X = G(U)$.

VI.3.b. Vecteurs aléatoires

On s'intéresse à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$.

Déf. $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ est un *vecteur aléatoire*.

Proposition. Soient $X_1, \ldots, X_n: \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions. Il est équivalent de dire :

a) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, X_i est $\mathcal{F}$-mesurable

b) $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ est $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$-mesurable, où $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

Preuve. On suppose a)

Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\{X \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\} = \bigcap_{i=1}^n \underbrace{\{X \in A_i\}}_{\in \mathcal{F} \text{ par a)}} \in \mathcal{F}$

Comme $\sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n\,; A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, X est $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$-mesurable, donc a) implique b).

Réciproquement, on suppose b). On pose : $\pi_i(x_1, ..., x_n) = x_i$ la i-ème projection canonique.

Elle est continue, donc $X_i = \pi_i(X)$ est $\mathcal{F}$-mesurable. $\square$

Déf. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable. Sa loi admet une densité noté $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ (sous-entendu : par rapport à la mesure de Lebesgue l_n) si $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B p(x)\, l_n(\mathrm{d}x)$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}^n, p(x) \geqslant 0$, p est mesurable et $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\, l_n(\mathrm{d}x) = 1$.

Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ mesurable, alors $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, p(y)\, l_n(\mathrm{d}y)$.

Théorème de différentiation de Lebesgue en dimension n. Pour l_n-presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$p(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mathbb{P}(\|X - x\| \leqslant r)}{l_n(B(0, r))}$$

Définition. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable. Sa *fonction caractéristique* est la transformée de Fourier de sa loi.

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \hat{\mu}_X = \mathbb{E}\big[e^{i\langle u, X\rangle}\big] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u, y\rangle}\, \mu_X(\mathrm{d}y)$$

On a $\hat{\mu}_X(0) = 1$ et $u \mapsto \hat{\mu}_X(u)$ est continue.

Résultats.

1. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}$-mesurable,

   X et Y ont même loi $\Leftrightarrow \mu_X = \mu_Y \Leftrightarrow \hat{\mu}_X = \hat{\mu}_Y$ (injectivité de la transformée de Fourier)

2. Formule d'inversion L^1 : si $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\mu}_X(u)|\, l_n(\mathrm{d}u) < \infty$, alors la loi de X admet une densitée donnée par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^n, p(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle u, x\rangle} \hat{\mu}_X(u)\, l_n(\mathrm{d}u)$$

   p est continue bornée et $\lim_{\|x\| \to \infty} p(x) = 0$.

VI.3.c. Covariance

Déf.

1. Soit X, Y deux V.A. réelles $\mathcal{F}$-mesurables. On suppose qu'elles admettent un moment d'ordre 2. Par Hölder ou Cauchy-Shwarz, XY est intégrable. On pose :

   $$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))\, (Y - \mathbb{E}(Y))]$$

   En développant :

   $$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\, \mathbb{E}|Y|$$

   On a en particulier, $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$.

2. Soit $X = (X_1, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable. On suppose qu'il admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire $\mathbb{E}[\|X\|^2] < \infty$ (cela implique que les X_i ont un moment d'ordre 2). On pose :

   $$\Gamma_X = (\ \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\ )_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

Γ_X est la matrice ($n \times n$ symmétrique) de covariance de X.

Prop. Soit $X = (X_1, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable. On note Γ sa matrice de covariance. On pose $v = (\mathbb{E}[X_1], ..., \mathbb{E}[X_n]) \in \mathbb{R}^n$. <u>Alors :</u> $\forall u \in \mathbb{R}^n$,

1. $\mathbb{E}[\langle u, X \rangle] = \langle u, v \rangle$
2. $\mathrm{var}(\langle u, X \rangle) = \langle u, \Gamma u \rangle$
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\Gamma_{MX} = M \Gamma\, {}^t M$

Preuve. En exo.

Prop. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable, $X = (X_1, ..., X_n)$. On suppose que X admet un moment d'ordre 2. <u>Alors :</u> $\hat{\mu}$ est C^2 et $\forall u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\hat{\mu}(u) = 1 + \sum_{k=1}^{n} i\, u_k\, \mathbb{E}[X_k] - \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} u_j\, u_k\, \mathbb{E}[X_j X_k] + o(\|u\|^2)$$

Preuve. En exercice (simple application de la dérivation sous l'espérance).

(au passage, s'intéresser à la biographie de Galton)

VII. Indépendance

VII.1. Définitions et propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, présent dans toute la suite.

VII.1.a. Indépendance d'événements

Soit $A \in \mathcal{F}$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. On suppose que A s'est produit.

On pose $\mathbb{P}(\cdot \,|\, A) : \mathcal{F} \to [0, 1]$ avec $\mathbb{P}(B \,|\, A) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ (lire : probabilité de B sachant A).

$$\mathbb{E}_A[X] = \int_{\Omega} X\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega \,|\, A) = \frac{\mathbb{E}[X\, \mathbf{1}_A]}{\mathbb{P}(A)}$$

(vrai pour $X \geqslant 0$, pour les fonctions indicatrices d'évènements, puis... preuve habituelle avec le lemme technique).

$B \in \mathcal{F}$ est indépendant de A si sa réalisation ou sa non-réalisation n'a aucune influence sur B, c'est-à-dire $\mathbb{P}(B \,|\, A) = \mathbb{P}(B)$, et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$.

Définitions.

a) $A, B \in \mathcal{F}$ sont dits *indépendants* sous $\mathbb{P}$ si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$

b) Soient $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$. Ils sont dits *mutuellement indépendants* sous $\mathbb{P}$ si :

$$\forall k \in \{2, ..., n\}, \forall 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n, \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = \mathbb{P}(A_{j_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{j_k})$$

c) Soit $A_i \in \mathcal{F}, i \in I$ une famille d'événements. On dit qu'ils sont *mutuellement indépendants* sous $\mathbb{P}$ si :

$$\forall J \subset I \text{ avec } J \neq \varnothing \text{ et } J \text{ fini, on a } \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Attention. L'indépendance deux-à-deux n'implique pas l'indépendance mutuelle.

Exemple. $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k} \delta_k$ est la loi uniforme sur Ω. Prenons $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$ et $C = \{1,4\}$. On vérifie que A et B sont indépendants sous $\mathbb{P}$, A et C sont indépendants sous $\mathbb{P}$, B et C sont indépendants sous $\mathbb{P}$, mais A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants sous $\mathbb{P}$.

2013-12-09

VII.1.b. Indépendance de classes d'événements

Déf.

a) Soient $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \subset \mathcal{F}$ n classes d'événements. Elles sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$ si $\forall A_1 \in \mathcal{R}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}_n$, les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants sous $\mathbb{P}$.

b) Soient $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{F}, i \in I$ une famille de classes d'évènements. Elles sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$ si $\forall J \subset I$ fini non-vide, les classes d'événements $\mathcal{R}_j, j \in J$ sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$.

Concrètement, les $(\mathcal{R}_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$ si $\forall J \subset I$ fini non vide, $\forall A_j \in \mathcal{R}_j, j \in J$, $\mathbb{P}\big(\bigcap_{j \in J} A_j\big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$.

Proposition. (qui peut le plus peut le moins) Soient $(\mathcal{R}_i)_{i \in I}$ une famille de classes d'événements mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$. Soit $I' \subset I$ et $\forall i \in I'$, $\mathcal{R}'_i \subset \mathcal{R}_i$. Alors : $(\mathcal{R}'_j)_{j \in J'}$ sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$.

Preuve. Évident.

Lemme. Soient $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \subset \mathcal{F}$ des classes d'événements. On suppose que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \Omega \in \mathcal{R}_i$. Alors $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$ ssi :

$$\forall A_1 \in \mathcal{R}_1, \ldots, \forall A_n \in \mathcal{R}_n, \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n)$$

Preuve. $\Rightarrow$: découle directement de la définition

$\Leftarrow$: il faut montrer que $\forall A_1 \in \mathcal{R}_1, \ldots, \forall A_n \in \mathcal{R}_n$, $\forall 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n$, $\mathbb{P}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = \mathbb{P}(A_{j_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{j_k})$.

On pose $B_{j_l} = A_{j_l}$ pour $1 \leqslant l \leqslant k$ et $B_j = \Omega$ pour $j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$..

On a par hypothèse $\mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1) \cdots \mathbb{P}(B_n)$. $\mathbb{P}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = \mathbb{P}(A_{j_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{j_k})$, donc $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellements indépendants sous $\mathbb{P}$, donc $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$. $\square$

Théorème. Soient $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{F}, i \in I$. On suppose que $\mathcal{P}_i$ est un pi-système. On suppose que les $\mathcal{P}_i, i \in I$ sont mutuellement indépendants sous $\mathbb{P}$. Alors : les $\sigma(\mathcal{P}_i), i \in I$ sont mutuellement indépendants sous $\mathbb{P}$.

Preuve. Au vu des définitions, il suffit de montrer le théorème pour $I = \{1, \ldots, n\}$ fini.

On montre le résultat intermédiaire suivant :

($*$) Soient $\mathcal{P}_1^*, \ldots, \mathcal{P}_n^*$ des pi-systèmes. $\mathcal{P}_1^*, \ldots, \mathcal{P}_n^*$ mutuellement indépendants sous $\mathbb{P} \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_1^*)$, $\mathcal{P}_2^*, \ldots, \mathcal{P}_n^*$ sont mutuellement indépendants sous $\mathbb{P}$.

Preuve de (∗). On fixe $A_2 \in \mathcal{P}_2^*, \ldots, A_n \in \mathcal{P}_n^*$. On pose $\mathcal{L} = \{B \in \sigma(\mathcal{P}_1^*) : \mathbb{P}(B \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n)\}$. Par hypothèse, $\mathcal{P}_1^* \subset \mathcal{L}$. On vérifie facilement que $\mathcal{L}$ est une classe monotone. Par théorème de la classe monotone, $\mathcal{L} = \sigma(\mathcal{P}_1^*)$.

En fait, $\forall A_1 \in \sigma(\mathcal{P}_1^*), \forall A_2 \in \mathcal{P}_2^*, \ldots, \forall A_n \in \mathcal{P}_n^*$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n)$. Comme $\Omega \in \sigma(\mathcal{P}_1^*) \cap \mathcal{P}_2^* \cap \cdots \cap \mathcal{P}_n^*$, le lemme précédent implique que ces classes d'ensembles sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$.

Par (∗), $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ mutuellement indépendantes $\Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_1), \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ mutuellement indépendantes.

Par (∗), $\mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n, \sigma(\mathcal{P}_1)$ mutuellement indépendantes $\Rightarrow \sigma(\mathcal{P}_2), \mathcal{P}_3, \ldots, \mathcal{P}_n, \sigma(\mathcal{P}_1)$ mutuellement indépendantes, etc. □

Proposition (indépendance par paquets). Soit I un ensemble d'indices non vide. Soit I_k, $k \in K$ une partition de I ($I_k \cap I_l = \varnothing$ si $k \neq l$ et $\bigcup_{k \in K} I_k = I$). Soit $\mathcal{F}_i, i \in I$ une famille de tribus. On suppose que les $\mathcal{F}_i, i \in I$ sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$. On pose $\mathcal{G}_k = \sigma(\mathcal{F}_i, i \in I_k)$. Alors : les tribus $\mathcal{G}_k, k \in K$ sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$.

Preuve. On pose $\mathcal{P}_k = \left\{A_1 \cap \cdots \cap A_n, n \in \mathbb{N}^*, A_1, \ldots, A_n \in \bigcup_{i \in I_k} \mathcal{F}_i\right\}$. $\mathcal{P}_k$ est un pi-système.

On $\bigcup_{i \in I_k} \mathcal{F}_i \subset \mathcal{P}_k \subset \sigma(\mathcal{F}_i, i \in I_k)$. Donc $\sigma(\mathcal{P}_k) = \sigma(\mathcal{F}_i, i \in I_k)$.

Les $\mathcal{P}_k, k \in K$ sont mutuellement indépendants sous $\mathbb{P}$ (exercice). Par le théorème précédent, les $\mathcal{G}_k = \sigma(\mathcal{P}_k)$ sont mutuellement indépendants sous $\mathbb{P}$. □

VII.1.c. Indépendance de variables aléatoires

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-mesurable.

Déf. La tribu engendrée par X est $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \,;\, B \in \mathcal{E}\}$. (c'est une tribu sur $\mathcal{F}$)

(rappel : $X^{-1}(B)$ est noté $\{X \in B\}$).

Déf. Soit I un ensemble non-vide d'indices. Soient $(E_i, \mathcal{E}_i), i \in I$ une famille d'espaces mesurables. Soient $X_i : \Omega \to E_i$, $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_i)$-mesurable une famille de variables aléatoires. Les variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$ ssi les tribus $\sigma(X_i)$, $i \in I$ sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$.

Proposition. Soit I un ensemble non-vide d'indices. On se donne, pour tout $i \in I$:

- $(E_i, \mathcal{E}_i)$ un espace mesurable ; $\mathcal{C}_i \in \mathcal{E}_i$ avec $\mathcal{C}_i$ un pi-système tel que $\sigma(\mathcal{C}_i) = \mathcal{E}_i$.
- Soit $X_i : \Omega \to E_i$, $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_i)$-mesurable. La loi de X_i sous $\mathbb{P}$ est notée μ_i.

  (rappel : $\forall B \in \mathcal{E}_i$, $\mu_i(B) = \mathbb{P}(X_i \in B) = \mathbb{P}(X_i^{-1}(B))$)

Alors : les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les $X_i, i \in I$ sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$
2. $\forall J \subset I$ fini non-vide, $\forall B_j \in \mathcal{E}_j, j \in J$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in B_j\}\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j \in B_j)$$
3. $\forall J \in I$ fini non-vide, $\forall C_j \in \mathcal{C}_j, j \in J$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in C_j\}\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j \in C_j)$$

4. $\forall J=\{j_1,\ldots,j_n\}\subset I$ (les j_k sont distincts), la loi de $(X_{j_1},\ldots,X_{j_n})$ sous $\mathbb{P}$ est la mesure produit $\mu_{j_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{j_n}$.

5. $\forall J\subset I$ fini non-vide, $\forall h_j : E_j \to \begin{smallmatrix}[0,\infty]\\ \mathbb{R}\end{smallmatrix}$ $\mathcal{E}_j$-mesurable $\begin{smallmatrix}\varnothing\\ \text{bornée}\end{smallmatrix}$, $j\in J$,

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j\in J} h_j(\mathrm{Xj})\right] = \prod_{j\in J} \mathbb{E}[h_j(X_j)]$$

Preuve. On suppose (1) : les $\sigma(X_i), i\in I$ sont mutuelement indépendantes sous $\mathbb{P}$. Donc $\forall J\in I$ fini non-vide, $\forall A_j\in\sigma(X_j)$, $j\in J$ (ie $\forall B_j\in\mathcal{E}_j$, $A_j=\{X_j\in B_j\}$, $j\in J$), on a :

$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} \underbrace{\{X_j\in B_j\}}_{=A_j}\right)=\prod_{j\in J}\mathbb{P}(\underbrace{X_j\in B_j}_{=A_j})$, donc $(1)\Rightarrow(2)$.

$(2)\Rightarrow(3)$: évident.

Montrons que $(3)\Rightarrow(2)$: Posons $\mathcal{P}_i=\{X_i^{-1}(C), C\in\mathcal{C}_i\}$. On vérifie que c'est un pi-système sur $(\Omega,\mathcal{F})$ et $\sigma(\mathcal{P}_i)=\sigma(X_i)$. Or (3) signifie que les $\mathcal{P}_i, i\in I$ sont mutuellement indépendants sous $\mathbb{P}$. Donc par un théorème précédent, les $\sigma(\mathcal{P}_i)=\sigma(X_i), i\in I$ sont mutuellement indépendants sous $\mathbb{P}$.

Montrons que $(2)\Rightarrow(4)$: Soit $J=\{j_1,\ldots,j_n\}\subset I$ avec $j_1,\ldots,j_n$ distincts. $\forall B_1\in\mathcal{E}_{j_1},\ldots,\forall B_n\in\mathcal{E}_{j_n}$, $\bigcap_{1\leqslant k\leqslant n}\{X_{j_k}\in B_k\}=\{(X_{j_1},\ldots,X_{j_n})\in B_1\times\cdots\times B_n\}$.

$$\begin{aligned}
\mu_{(X_{j_1},\ldots,X_{j_n})}(B_1\times\cdots\times B_n) &\overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}((X_{j_1},\ldots,X_{j_n})\in B_1\times\cdots\times B_n)\\
&\overset{\text{remarque ensembliste}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant n}\{X_{j_k}\in B_k\}\right)\\
&\overset{(2)}{=} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{j_k}\in B_k)\\
&= \prod_{k=1}^n \mu_{j_k}(B_k)\\
&= (\mu_{j_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{j_n})(B_1\times\cdots\times B_n)
\end{aligned}$$

Donc $\mu_{(X_{j_1},\ldots,X_{j_n})}=\mu_{j_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{j_n}$

Preuve de (4) $\Rightarrow$ (5) : Fubini (tôrch). Soit $J=\{j_1,\ldots,j_n\}\subset I$, les j_k distincts. Pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$, on fixe $h_{j_k}: E_{j_k}\to[0,\infty]$ $\mathcal{E}_{j_k}$-mesurable.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h_{j_1}(X_{j_1})\cdots h_{j_n}(X_{j_n})] &\overset{\text{transfert}}{=} \int_{E_{j_1}\times\cdots\times E_{j_n}} \mu_{(X_{j_1},\ldots,X_{j_n})}(\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n)\, h_{j_1}(y_1)\cdots h_{j_n}(y_n)\\
&\overset{(4)}{=} \int_{E_{j_1}\times\cdots\times E_{j_n}} \mu_{j_1}(\mathrm{d}y_1)\cdots\mu_{j_n}(\mathrm{d}y_n)\, h_{j_1}(y_1)\cdots h_{j_n}(y_n)\\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \prod_{k=1}^n \int_{E_{j_k}} \mu_{j_k}(\mathrm{d}x)\, h_{j_k}(y_k)\\
&\overset{\text{transfert}}{=} \mathbb{E}[h_{j_1}(X_{j_1})]\cdots\mathbb{E}[h_{j_n}(X_{j_n})]
\end{aligned}$$

Preuve de $(5)\Rightarrow(2)$: Clair ($h_j=\mathbf{1}_{B_j}, B_j\in\mathcal{E}_j$). $\square$

Corollaire. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires réelles. Elles sont mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$ ssi $\forall j=\{j_1,\ldots,j_n\}$ (j_k distincts), $\forall y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_{j_1}\leqslant y_1\,;X_{j_2}\leqslant y_2\,;\cdots;X_{j_n}\leqslant y_n) = \mathbb{P}(X_{j_1}\leqslant y_1)\cdots\mathbb{P}(X_{j_n}\leqslant y_n)$$

Vocabulaire et convention.

- On dira que les $X_i, i \in I$ sont indépendants pour dire qu'ils sont mutuellement indépendants $\begin{matrix}\mathcal{F}_i\\ \\ A_i\end{matrix}$ sous $\mathbb{P}$ (lorsqu'il n'y a pas ambigüité).

- Une suite de variables aléatoires est dite IID (indépendante et identiquement distribuée) si elles sont indépendantes (ie mutuellement indépendantes sous $\mathbb{P}$...) et de même loi.

Proposition. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ des variables aléatoires $\mathcal{F}$-mesurablesindépendantes. On pose $X = X_1 + \cdots + X_p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}\forall u \in \mathbb{R}^n, \hat{\mu}_X(u) & = & \mathbb{E}\big[e^{i\langle u, X_1\rangle} \ldots e^{i\langle u, X_p\rangle}\big]\\ & = & \hat{\mu}_{X_1}(u) \cdots \hat{\mu}_{X_p}(u)\\ & = & \mathbb{E}\big[e^{i\langle u, X_1\rangle}\big] \cdots \mathbb{E}\big[e^{i\langle u, X_p\rangle}\big]\end{array}$$

Preuve. Par définition de la convoultion des mesures finies :

$\mu_{X_1} * \cdots * \mu_{X_p} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$est la mesure image de $\mu_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{X_p}$ par l'application $(y_1, \ldots, y_p) \in (\mathbb{R}^n)^p \mapsto y_1 + \cdots + y_p$.

La loi de X est donc $\mu_{X_1} * \cdots * \mu_{X_p}$, puisquie la loi de $(X_1, \ldots, X_p) : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^p$ est $\mu_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{X_p}$ (elles sont indépendantes), donc $\hat{\mu}_X = \widehat{\mu_{X_1} * \cdots * \mu_{X_p}} = \hat{\mu}_{X_1} \cdots \hat{\mu}_{X_p}$. $\square$

Proposition. Soit Y_1, ..., Y_n n variables aléatoires réelles. Alors : elles sont indépendantes ssi $\forall u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{iu_1 Y_1 + \cdots + iu_n Y_n}] = \mathbb{E}[e^{iu_1 Y_1}] \cdots \mathbb{E}[e^{iu_n Y_n}]$.

Preuve. On pose $X = (Y_1, \ldots, Y_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, X est $\mathcal{F}$-mesurable.

Soient $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$, on pose $u = (u_1, \ldots, u_n)$. $\langle u, X\rangle = u_1 Y_1 + \cdots + u_n Y_n$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}[e^{iu_1 Y_1 + \cdots + iu_n Y_n}] & = & \mathbb{E}\big[e^{i\langle u, x\rangle}\big]\\ & = & \hat{\mu}_X(u)\end{array}$$

Si $\forall u_1$, ..., $u_n \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{iu_1 Y_1 + \cdots + iu_n Y_n}] = \mathbb{E}[e^{iu_1 Y_1}] \cdots \mathbb{E}[e^{iu_n Y_n}]$, alors $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\mu}_X(u) = \hat{\mu}_{X_1}(u_1) \cdots \hat{\mu}_{X_n}(y_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u, z\rangle} (\mu_{Y_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{Y_n})(\mathrm{d}z)$.

Par injectivité de la transformée de Fourier des mesures, la loi de $X = (Y_1, \ldots, Y_n)$ est $\mu_{Y_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{Y_n}$, donc $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes. $\square$

Proposition. Soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires complexes $\mathcal{F}$-mesurables intégrables (ie $\mathbb{E}[|X_k|] < \infty$) et indépendantes. Alors : $X_1 \cdots X_n$ est intégrable, et

$$\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_n]$$

Preuve. $|X_1 \cdots X_n| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\mathcal{F}$-mesurable. $\mathbb{E}[|X_1 \cdots X_n|]$ existe, il faut montrer qu'elle est finie.

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}[|X_1 \cdots X_n|] & \overset{\text{transfert}}{=} & \displaystyle\int_{\mathbb{C}^n} \mu_{(X_1, \ldots, X_n)}(\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n)\, |Y_1 \cdots Y_n|\\ & \overset{\text{indépendance}}{=} & \displaystyle\int_{\mathbb{C}^n} \mu_{X_1}(\mathrm{d}y_1) \cdots \mu_{X_n}(\mathrm{d}y_n)\, |Y_1 \cdots Y_n|\\ & \overset{\text{Fubini}}{=} & \displaystyle\left(\int_{\mathbb{C}} \mu_{X_1}(\mathrm{d}x) Y_1\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{C}} \mu_{X_n}(\mathrm{d}x) Y_n\right)\\ & \overset{\text{transfert}}{=} & \mathbb{E}[|X_1|] \cdots \mathbb{E}[|X_n|]\\ & < & \infty \text{ (par hypothèse)}\end{array}$$

Donc $X_1 \cdots X_n$ est intégrable, et on a $\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_n]$ (transfert + indépendance + Fubini + transfert). □

Remarque. Si $X_1, ..., X_n : \Omega \to [0, \infty]$ $\mathcal{F}$-mesurables indépendantes, alors $\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_n]$.

2013-12-11

Lemme. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 ($\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$). Si elles sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ (la réciproque est fausse).

Preuve. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X\, Y] - \mathbb{E}[X]\, \mathbb{E}[Y] = 0$ si X et Y indépendants, car $\mathbb{E}[X\, Y] = \mathbb{E}[X]\, \mathbb{E}[Y]$ dans ce cas là. □

Proposition. On se donne $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2. On les suppose deux-à-deux décorrélées, c'est-à-dire $\forall 1 \leqslant k < l \leqslant n$, $\mathrm{Cov}(X_k, X_l) = 0$. Alors :

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_n)^2] &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{E}[X_k^2] + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \mathbb{E}[X_k\, X_l] \\ &= a\end{aligned}$$

Si $\mathrm{Cov}(X_k, X_l) = 0$, alors $\mathbb{E}[X_k, X_l] = \mathbb{E}[X_k]\, \mathbb{E}[X_l]$

$$\begin{aligned}a &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{E}[X_k^2] + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \mathbb{E}[X_k]\, \mathbb{E}[X_l] \\ &\overset{\text{König}}{=} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathrm{Var}(X_k) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (\mathbb{E}[X_k])^2 + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \mathbb{E}[X_k]\, \mathbb{E}[X_l] \\ &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathrm{Var}(X_k) + (\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n])^2\end{aligned}$$

On conclut car par König, $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_n)^2] - (\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n])^2$. □

Corollaire. Soient $X_1, ..., X_n$ des V.A. réelles admettant des moments d'ordre 2. On les suppose indépendante (deux à deux suffit également). Alors :

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)$$

Preuve. Immédiate à partir de la proposition précédente. □

VII.2. Construction des suites de V.A. indépendantes

Théorème. Soient $\mu_n : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1], n \in \mathbb{N}$ des lois (mesures de probabilités). Alors : il existe un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une suite de V.A. $X_n : \Omega \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}$-mesurables, telles que :

1. La loi de X_n est μ_n
2. Les $(X_n)_{n \geqslant 0}$ sont indépendantes

La preuve est en plusieurs étapes.

Proposition. Il existe un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une suite $D_n : \Omega \to \{0,1\}, n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}$-mesurables, indépendantes, telles que $\mathbb{P}(D_n = 0) = \mathbb{P}(D_n = 1) = 1/2$.

Preuve. Pour tout $x \in [0,1[$, on note $(D_n(x))_{n \geqslant 0}$ son développement dyadique, c'est-à-dire que :

1. $D_n(x) \in \{0,1\}, n \geqslant 0$

2. La suite $(D_n(x))_{n \geqslant 0}$ contient une infinité de termes nuls (ie. n'est pas stationnaire à 1 APCR)

3. $x = \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n-1} D_n(x)$

On vérifie que $D_n(x) = \lfloor 2^{n+1} x \rfloor - 2 \lfloor 2^n x \rfloor$ (exercice)

$D_n : [0,1[\to \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ est mesurable.

On pose $\Omega = [0,1[$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1[)$ et $\mathbb{P} = l(\cdot \cap [0,1[)$ (la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1[$).

Les D_n sont des variables aléatoires $\mathcal{F}$-mesurables.

On fixe $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \in \{0,1\}$. On pose $a = \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{1}{4}\varepsilon_1 + \cdots + 2^{-n-1}\varepsilon_n$.

On remarque que $\{D_0 = \varepsilon_0\} \cap \cdots \cap \{D_n = \varepsilon_n\} = \{x \in [0,1[: \forall 0 \leqslant k \leqslant n, D_k(x) = \varepsilon_k\} = [a, a + 2^{-n-1}[$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_0 = \varepsilon_0 ; \cdots ; D_n = \varepsilon_n) &= l([a, a + 2^{-n-1}[) \\ &= 2^{-n-1} \end{aligned}$$

On fixe $n \geqslant 0$ et $\varepsilon \in \{0,1\}$.

$$\begin{aligned} \{D_n = \varepsilon\} &= \bigsqcup_{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in \{0,1\}} \{D_0 = \varepsilon_0\} \cap \cdots \cap \{D_{n-1} = \varepsilon_{n-1}\} \cap \{D_n = \varepsilon\} \\ \mathbb{P}(D_n = \varepsilon) &= \sum_{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in \{0,1\}} \underbrace{\mathbb{P}(D_0 = \varepsilon_0 ; \cdots ; D_{n-1} = \varepsilon_{n-1} ; D_n = \varepsilon)}_{2^{-n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $\forall n \geqslant 0$, $\mathbb{P}(D_n = 0) = \mathbb{P}(D_n = 1) = 1/2$. On a donc montré que :

$$\forall n \geqslant 0, \forall \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}, \mathbb{P}(D_0 = \varepsilon_0 ; \cdots ; D_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^{n+1}} = \mathbb{P}(D_0 = \varepsilon_0) \cdots \mathbb{P}(D_n = \varepsilon_n)$$

Cela implique que les $(D_n)_{n \geqslant 0}$ sont indépendants. $\square$

Proposition. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soient $Y_n : \Omega \to \{0,1\}, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}$-mesurbles. On suppose que les $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ sont indépendantes et telles que $\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{P}(Y_n = 1) = 1/2$. On pose :

$$U = \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n-1} Y_n : \Omega \to [0,1]$$

Alors : U est $\mathcal{F}$-mesurable et de loi uniforme sur $[0,1]$:

$$\forall B \in \mathcal{B}([0,1]), \mathbb{P}(U \in B) = l(B)$$

Preuve. $\forall \omega \in \Omega$, $0 \leqslant U(\omega) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n-1} = 1$

U est une série de V.A. $\mathcal{F}$-mesurables positives, elle est donc $\mathcal{F}$-mesurable.

On fixe $0 \leqslant k \leqslant 2^{n+1}$. On peut écrire :

$$\frac{k}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{1}{4}\varepsilon_1 + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\varepsilon_n \text{ avec } \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(U \in \left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right[\right) &= \mathbb{P}(Y_0 = \varepsilon_0 ; \cdots ; Y_n = \varepsilon_n) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= l\left(\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right[\right)
\end{aligned}$$

On note ν la loi de U sous $\mathbb{P}$ $(\nu(B) = \mathbb{P}(U \in B),\ B \in B([0,1[))$.

On pose $\mathcal{P} = \left\{\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right[, 0 \leqslant k < 2^{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$. $\mathcal{P}$ est un pi-système tel que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}([0,1[)$ (exercice). ν et l coincident sur $\mathcal{P}$, donc $\nu = l$ par unicité du prolongement des mesures. □

Preuve du théorème. On se donne $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ et $D_n : \Omega \to \{0,\ 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}$-mesurables, indépendantes et telles que $\mathbb{P}(D_n = 0) = \mathbb{P}(D_n = 1) = 1/2$.

On se donne une bijection $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On pose :

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{p \in \mathbb{N}} 2^{-p-1} D_{\varphi(n,p)} \\
\mathcal{G}_n &= \sigma(D_{\varphi(n,p)}, p \in \mathbb{N}) \\
&= \sigma(\sigma(D_{\varphi(n,p)}), p \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

L'indépendance par paquets implique que les tribus $\mathcal{G}_n$ sont indépendantes.

U_n est $\mathcal{G}_n$-mesurable, donc $\sigma(U_n) \subset \mathcal{G}_n$ et donc les $\sigma(U_n)$, $n \geqslant 0$ sont indépendantes, donc (par définition) les U_n sont indépendantes.

De plus, la propositionprécédente implique que U_n est de loi uniforme sur $[0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in]0,1[$, on pose :

$$G_n(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mu_n(]-\infty, x]) > y\}$$

G_n est le pseudo-inverse continu à droite de la fonction de répartition de μ_n.

On a montré que $X_n = G_k(U_n)$ a pour loi μ_n. Les $X_n, n \in \mathbb{N}$ sont indépendantes. □

Définition. Un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est dit *régulier* s'il est isomorphe à $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou bien dénombrable.

Remarque. Si (E, d) est un espace métrique séparable complet, et si $B \in \mathcal{B}(E)$, alors $(B, \mathcal{B}(B))$ est régulier par le théorème d'isomorphisme de Borel.

Corollaire. Soit $(E_n, \mathcal{E}_n, \mu_n), n \in \mathbb{N}$ des espaces de probabilités tels que $(E_n, \mathcal{E}_n)$ est régulier. Alors : il existe $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilités et $X_n : \Omega \to E_n$, $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_n)$-mesurables, telles que :

1. La loi de X_n est μ_n

2. Les $(X_n)_{n \geqslant 0}$ sont indépendantes

Preuve. Soit $\Phi_n : E_n \to \mathbb{R}$ isomorphisme d'espaces mesurables (Φ_n est une bijection, Φ_n est $(\mathcal{E}_n, \mathcal{B}(R))$-mesurable, et sa réciproque $\Phi_n^{-1} : \mathbb{R} \to E_n$ est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{E}_n)$-mesurable).

On pose $\nu_n = \mu_n \circ (\Phi_n^{-1})^{-1}$, on a : $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu_n(B) = \mu_n(\Phi_n(B))$

Il existe $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-mesurables, telles que Y_n ait pour loi ν_n et $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ sont indépendantes. On pose $X_n = \Phi_n^{-1}(Y_n)$. $\square$

VII.3. Lemme de Borel-Cantelli et réciproques partielles

On fixe $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités de référence.

Soit $A \in \mathcal{F}$, « $\omega \in A$ » se lit et s'interprète « ω réalise l'événement A ». $A = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ réalise } A\}$.

Soient $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$ une suite d'événements. On pose :

$$
\begin{aligned}
A^* &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n \in \mathbb{N}\} \\
&= \{\text{les } A_n \text{ sont réalisés infiniment souvent}\} \\
A_* &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour } n \text{ assez grand}\} \\
&= \{\text{tous les } A_n \text{ sont réalisés à partir d'un certain rang}\}
\end{aligned}
$$

Fait n°1. On vérifie que $A^* = \bigcap_{N \geqslant 0} \bigcup_{n \geqslant N} A_n \in \mathcal{F}$, et $A_* = \bigcup_{N \geqslant 0} \bigcap_{n \geqslant N} A_n \in \mathcal{F}$.

On remarque que :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A^*} &= \limsup_{n \to \infty} \mathbf{1}_{A_n} \\
\mathbf{1}_{A_*} &= \liminf_{n \to \infty} \mathbf{1}_{A_n}
\end{aligned}
$$

Cela justifie les notations :

$$
\begin{aligned}
A^* &= \limsup_{n \to \infty} A_n \\
A_* &= \liminf_{n \to \infty} A_n
\end{aligned}
$$

Propriété.

$$
\begin{aligned}
\Omega \setminus \limsup_{n \to \infty} A_n &= \liminf_{n \to \infty} (\Omega \backslash A_n) \\
\Omega \setminus \liminf_{n \to \infty} A_n &= \limsup_{n \to \infty} (\Omega \backslash A_n)
\end{aligned}
$$

Fait n°2. On introduit :

$$
\begin{aligned}
N &= \sum_{n \geqslant 0} \mathbf{1}_{A_n} \\
N' &= \sum_{n \geqslant 0} \mathbf{1}_{\Omega \backslash A_n}
\end{aligned}
$$

$N, N' : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{F}$-mesurables. On vérifie que :

$$
\begin{aligned}
\{N = \infty\} &= A^* = \limsup_{n \to \infty} A_n \\
\{N' < \infty\} &= A_* = \liminf_{n \to \infty} A_n
\end{aligned}
$$

Lemme de Borel-Cantelli. Soient $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Alors :

$$
\mathbb{P}\left(\limsup_{n \to \infty} A_n \right) = 0
$$

c'est-à-dire : $\mathbb{P}(\text{aucun des } A_n \text{ n'est réalisé à partir d'un certain rang}) = 1$.

Preuve. (retenir la preuve et non le résultat, il est mieux de la refaire à chaque fois)

$N = \sum_{n \geqslant 0} \mathbf{1}_{A_n}$. $\mathbb{E}[N] = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_n}] = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, donc $N < \infty$ $\mathbb{P}$-presque surement, donc $\mathbb{P}(N = \infty) = 0$. $\square$

Lemme de Borel. Soient $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

1. $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n) = \infty$

2. Les événements $A_n, n \in \mathbb{N}$ sont indépendants

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \to \infty} A_n\right) = 1$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}(\text{les } A_n \text{ sont réalisés infiniment souvent}) = 1$.

Preuve. $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $N_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathbf{1}_{A_k}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}[e^{-N_n}] & = & \mathbb{E}\big[e^{-\mathbf{1}_{A_0}} \times \cdots \times e^{-\mathbf{1}_{A_n}}\big] \text{ (produit de V.A. indépendantes)} \\ & = & \mathbb{E}\big[e^{-\mathbf{1}_{A_0}}\big] \times \cdots \times \mathbb{E}[e^{-\mathbf{1}_{A_n}}] \\ \mathbb{E}\big[e^{-\mathbf{1}_{A_k}}\big] & = & \mathbb{E}[e^{-1}\mathbf{1}_{A_k} + 1\, \mathbf{1}_{\Omega \setminus A_k}] \\ & = & e^{-1}\mathbb{P}(A_k) + (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\ & = & 1 - (1 - e^{-1})\mathbb{P}(A_k) \end{array}$$

Inégalité de convexité : $1 - r \leqslant e^{-r}$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} 1 - (1 - e^{-1})\mathbb{P}(A_k) & \leqslant & \exp\left(-(1 - e^{-1})\mathbb{P}(A_k)\right) \\ \forall n \geqslant 0, \mathbb{E}[e^{-N_n}] & \leqslant & \exp\left(-(1 - e^{-1})\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right) \\ & \xrightarrow[n \to \infty]{} & 0 \ \text{ (par hypothèse)} \end{array}$$

Donc $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[e^{-N_n}] = 0$. $N = \lim_{n \to \infty} \uparrow N_n = \sum_{n \geqslant 0} \mathbf{1}_{A_n}$.

Par convergence dominée $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[e^{-N_n}] = \mathbb{E}[e^{-N}]$, avec la convention $e^{-\infty} = 0$ (et donc : $e^{-\cdot} : [0, \infty] \to [0, 1]$ est mesurable continue bijective).

Donc $\mathbb{E}[e^{-N}] = 0$, donc presque-surement $e^{-N} = 0$, donc presque-surement $N = \infty$,

donc $\mathbb{P}(N = \infty) = \mathbb{P}(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 1$. $\square$

Application. On se donne Σ un ensemble fini ayant au moins deux éléments (que l'on voit comme un alphabet). On se donne une suite $X_n : \Omega \to \Sigma, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}$-mesurables (ie $\forall a \in \Sigma$, $\{X_n = a\} \in \mathcal{F}$).

On suppose que les X_n sont indépendantes et de même loi μ sur Σ : $\forall a \in \Sigma, \mathbb{P}(X_n = a) = \mu(a)$.

On suppose que $\forall a \in \Sigma$, $\mu(a) > 0$.

Alors : presque-surement, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1, \ldots, a_k) \in \Sigma^k$,

$$\#\{n \in \mathbb{N} : (X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k-1}) = (a_1, \ldots, a_k)\} \ = \ \infty$$

Preuve. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $w = (a_1, \ldots, a_k) \in \Sigma^k$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n,w} = \{X_n = a_1 ; \cdots ; X_{n+k-1} = a_k\}$.

$\mathbb{P}(A_{n,w}) = \mu(a_1) \cdots \mu(a_k) > 0$.

Les $A_{pk,w} \in \sigma(X_{p_k}, X_{pk+1}, ..., X_{(p+1)k-1})$, $p \in \mathbb{N}$ sont indépendants.

Comme $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_{pk,w}) = \infty$, le lemme de Borel implique $\mathbb{P}(A_w) = 1$, où $A_w = \limsup_{p \to \infty} A_{pk,w}$

On pose :

$$A = \bigcap_{\substack{w \in \Sigma^k \\ k \in \mathbb{N}^*}} A_w \text{ (indices dénombrables)}$$

Donc $\mathbb{P}(A) = 1$. On vérifie que $\forall w \in A, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall w = (a_1, ..., a_k) \in \Sigma^k$,

$$\#\{n \in \mathbb{N} : (X_n, ..., X_{n+k-1}) = (a_1, ..., a_k)\} = \infty$$

□

VIII. Convergence de V.A. ; lois des grands nombres

VIII.1. Résultats généraux

Rappels sur la convergence presque-sûre

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités de référence.

Déf. Soit (E, d) un espace métrique. On se donne une suite $X_n : \Omega \to E$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(E)$-mesurable. On dit que $\mathbb{P}$-presque surement $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} X$ si il existe $N \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0$ et $\forall \omega \in \Omega \setminus N$, $\lim_{n \to \infty} d(X_n(\omega), X(\omega)) = 0$.

Rappels des principaux théorèmes.

1. **Convergence monotone.** Soient $X_n : \Omega \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}$-mesurables telles que presque-surement $X_n \leqslant X_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. On pose $X = \sup_{n \geqslant 0} X_n : \Omega \to [0, \infty]$ qui est $\mathcal{F}$-mesurable.

   <u>Alors :</u> presque surement, $X = \lim_{n \to \infty} \uparrow X_n$, et on a $\mathbb{E}[X] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n]$.

2. **Lemme de Fatou.** Soient $X_n : \Omega \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}$-mesurables. <u>Alors :</u>

$$\mathbb{E}\Big[\liminf_{n \to \infty} X_n\Big] \leqslant \liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n]$$

3. **Interversion série/intégrale positive.** Soient $X_n : \Omega \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}$-mesurables. <u>Alors :</u>

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n \geqslant 0} X_n\right] = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{E}[X_n]$$

4. **Théorème de convergence dominée.** Soient $X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $n \in \mathbb{N}$ telles que $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} X$ presque-surement. On suppose l'existence de $Z : \Omega \to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{F}$-mesurable telle que $\mathbb{E}[Z] < \infty$ et presque-sûrement $|X_n| \leqslant Z$, $n \in \mathbb{N}$. <u>Alors :</u>

   a. X est intégrable

   b. $\mathbb{E}[\,|X_n - X|\,] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

   c. $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$

5. **Interversion série/intégrale $\boldsymbol{L^1}$.** Soient $X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$, $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{E}[\,|X_n|\,] < \infty$.

   Alors : $\sum_{n\geqslant 0} X_n$ est presque-surement bien définie et intégrable, et on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n\geqslant 0} X_n\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n]$$

VII.2. Convergence en probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités de référence.

Soit (E, d) un espace métrique ; on note $\mathcal{B}(E)$ la tribu des boréliens de E.

On pose $\mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F}) = \{X : \Omega \to E; X \text{ est } (\mathcal{F}, \mathcal{B}(E))\text{-mesurable}\}$.

Déf. Soient $X_n \in \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F}), n \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F})$. On dit que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ en $\mathbb{P}$-probabilité ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(d(X_n, X) > \varepsilon) = 0$$

Théorème. On se donne $X_n \in \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F}), n \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F})$.

1. Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ presque-sûrement, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ en $\mathbb{P}$-probabilité.

2. Si $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ en $\mathbb{P}$-probabilités, alors il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X$ presque-sûrement.

3. Si on a $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ en $\mathbb{P}$-probabilités et $\lim_{n\to\infty} X_n = Y$en $\mathbb{P}$-probabilités, alors $X = Y$ presque-sûrement.

Preuve.

1. Soit $\varepsilon > 0$. $0 \leqslant \mathbf{1}_{\{d(X_n, X) > \varepsilon\}} = Z_n \leqslant 1$ qui est intégrable sous $\mathbb{P}$, et de plus $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ presque surement (car $\lim_{n\to\infty} X_n = X$).

   Par convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n] = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(d(X_n, X) > \varepsilon) = 0$

2. On suppose que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(d(X_n,\, X) > \varepsilon) = 0$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(d(X_{n_k}, X) > 2^{-k}) \leqslant 2^{-k}$.

   Donc $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(d(X_{n_k}, X) > 2^{-k}) < \infty$, c'est-à-dire : $\mathbb{E}\big[\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{d(X_{n_k}, X) > 2^{-k}\}}\big] < \infty$,

   donc presque-sûrement $\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{1}_{\{d(X_{n_k}, X) > 2^{-k}\}} < \infty$, donc presque-sûrement pour tout k assez grand on a $d(X_{n_k}, X) \leqslant 2^{-k}$, donc presque-sûrement $\lim_{k\to\infty} d(X_{n_k}, X) = 0$

3. En exercice. □

Prop. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques séparables. On munit $E \times E'$ de la distance $D((x, y), (x', y')) = \max\,(d(x, x'), d'(y, y'))$. On sait que la topologie métrique de $(E \times E', D)$ est la topologie produit. Soit $X_n \in \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F}), n \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F})$. Soit $X'_n \in \mathcal{L}_{E'}(\Omega, \mathcal{F}), n \in \mathbb{N}$ et $X' \in \mathcal{L}_{E'}(\Omega, \mathcal{F})$. Alors : il y a équivalence entre

1. $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ en $\mathbb{P}$-probabilités et $\lim_{n\to\infty} X'_n = X'$ en $\mathbb{P}$-probabilité

2. $\lim_{n\to\infty} (X_n, X'_n) = (X, X')$ en $\mathbb{P}$-probabilité

Preuve.

$$\begin{aligned}\max\left(\mathbb{P}(d(X_n,X)>\varepsilon),\mathbb{P}(d'(X'_n,X')>\varepsilon)\right) &\leqslant \mathbb{P}(D((X_n,X'_n),(X,X'))>\varepsilon)\\ &\leqslant \mathbb{P}(d(X_n,X)>\varepsilon)+\mathbb{P}(d'(X'_n,X')>\varepsilon)\end{aligned}$$

Ce qui montre l'équivalence. □

Rappel de topologie métrique. $(E,\ d)$ et $(E',\ d')$ deux espaces métriques séparables, soit $f\colon E\to E'$, $(\mathcal{B}(E),\mathcal{B}(E'))$-mesurable. Soit $\delta>0$ et $x\in E$, on pose :

$$w_f(x,\delta) \ = \ \sup\left\{d'(f(y),f(z))\,;y,z\in E;y,z\in B(x,\delta)\right\}$$

Alors : f est continue en x ssi $\lim_{\delta\to 0^+} w_f(x,\delta)=0$.

Lemme. Sous les hypothèses et notations précédentes, on a :

1. $\forall\delta>0,\ x\in E\mapsto w_f(x,\delta)$ est $\mathcal{B}(E)$-mesurable
2. $C=\{x\in E\colon f \text{ est continue en } x\}\in\mathcal{B}(E)$

Preuve. $\forall a,\ \delta>0$, on pose $U_{a,\delta}=\{x\in E\colon \exists y,\ z\in B(x,\ \delta)$ tels que $d(f(y),\ f(z))>a\}$. $U_{a,\delta}=\{w_f(\cdot,\delta)>a\}$ est un ouvert (exercice). □

Théorème. Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques séparables. Soit $f\colon E\to E'$, $(\mathcal{B}(E),\mathcal{B}(E'))$-mesurable. On se donne $X_n\in\mathcal{L}_E(\Omega,\mathcal{F}),n\in\mathbb{N}$ et $X\in\mathcal{L}_E(\Omega,\mathcal{F})$. On suppose que :

a) $\lim_{n\to\infty}X_n=X$ en probabilité

b) presque-surement f est continue en X

Alors : $\lim_{n\to\infty}f(X_n)=f(X)$ en probabilités.

Preuve. Soient $\delta,\varepsilon>0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d'(f(X_n),f(X))>\varepsilon) &= \mathbb{P}(d'(f(X_n),f(X))>\varepsilon;d(X_n,X)<\delta)\\ &\quad+\mathbb{P}(d'(f(X_n),f(X))>\varepsilon;d(X_n,X)\geqslant\delta)\\ &\leqslant \mathbb{P}(w_f(X,\delta)>\varepsilon)+\mathbb{P}(d(X_n,X)\geqslant\delta)\end{aligned}$$

Donc :

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(d'(f(X_n),f(X))>\varepsilon) \ \leqslant \ \mathbb{P}(w_f(X,\delta)>\varepsilon)$$

Or $\mathbf{1}_{\{w_f(X,\delta)>\varepsilon\}}\xrightarrow[\delta\to 0]{}0$ presque-surement, et c'est majoré par 1 qui est $\mathbb{P}$-intégrable.

Par convergence dominée, $\lim_{\delta\to 0}\mathbb{P}(w_f(X,\delta)>\varepsilon)=0$. □

Proposition. Soit (E,d) espace métrique séparable. On se donne $X_n,X,Y_n,Y\in\mathcal{L}_E(\Omega,F),n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\lim_{n\to\infty}X_n=X$ en probabilités et $\lim_{n\to\infty}Y_n=Y$ en probabilités. Alors :

1. Si E est un espace vectoriel normé, alors $X_n+Y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}X+Y$ en probabilités.
2. Si $E=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si $Y\neq 0$ presque-surement, alors $\dfrac{X_n}{Y_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{X}{Y}$ en probabilités.
3. Si $E=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $X_nY_n\xrightarrow[n\to\infty]{}XY$ en probabilités.

4. Si $E = [-\infty, +\infty]$, alors $X_n \wedge Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X \wedge Y$ en probabilités et $X_n \vee Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X \vee Y$ en probabilités.

Preuve. On a que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en probabilités (par une proposition précédente). Soit $f: E \times E \to E$ qui est presque-sûrement continue en (X, Y). Donc $f(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(X, Y)$ en probas.

1. On prend $f(x, y) = x + y$;
2. On prend $f(x, y) = \frac{x}{y}$;
3. On prend $f(x, y) = x\,y$;
4. On prend $f(x, y) = x \wedge y$ et $f(x, y) = x \vee y$. $\square$

Théorème. Soit (E, d) un espace métrique séparable complet. Soit $\varepsilon_n \in]0, \infty[$, $n \geqslant 0$ tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < \infty$. Soit $X_n \in \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F}), n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(d(X_{n+1}, X_n) > \varepsilon_n) < \infty$.

Alors : Il existe $X \in \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ presque-sûrement.

Preuve. Par Borel-Cantelli, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) = 1$ et $\forall \omega \in B, \exists n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, d(X_{n+1}(\omega), X_n(\omega)) \leqslant \varepsilon_n$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}: \sum_{n\geqslant p_0} \varepsilon_n < \varepsilon$.

$\forall \omega \in B, \exists n_1(\omega) \in N: \forall n, m \geqslant n_1(\omega), d(X_n(\omega), X_m(\omega)) \leqslant \sum_{k=m\wedge n}^{m\vee n} \varepsilon_k < \varepsilon$. $(n_1(\omega) \geqslant n_0(\omega) \vee p_0)$

$\forall \omega \in B, (X_n(\omega))_{n\geqslant 0}$ est donc de Cauchy.

Donc $\forall \omega \in B, \exists X(\omega) \in E$ tel que $\lim_{n\to\infty} d(X_n(\omega), X(\omega)) = 0$.

On fixe $x_0 \in E$ (arbitraire). On pose, pour $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \begin{cases} x_0 & \text{si } \omega \notin B \\ X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc presque-sûrement, $\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0$. Il reste à montrer que X est mesurable :

Soit U un ouvert de E. $B \cap \{X \in U\} = \bigcup_{n\geqslant p} \bigcap_{k\geqslant p} \underbrace{\{X_k \in U\}}_{\in\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$

$(\Omega \setminus B) \cap \{X \in U\} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x_0 \notin U \\ \Omega \setminus B & \text{si } x_0 \in U \end{cases} \in \mathcal{F}$. Donc $\forall U$ ouvert de E, $\{X \in U\} \in \mathcal{F}$

X est donc $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(E))$-mesurable, donc $X \in \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F})$. $\square$

VIII.3. Métrisation de la convergence en probabilité

Soit (E, d) un espace métrique séparable.

Soient $X, Y \in \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F})$. On dit que $X \sim Y \Leftrightarrow$ presque-sûrement $X = Y$. On peut maintenant poser :

$$L_E(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \mathcal{L}_E(\Omega, \mathcal{F})/\sim$$

Convention. $\tilde{X} \in L_E(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est confondu avec n'importe lequel de ses représentants (cela convient tant que l'on fait des opérations dénombrables).

Théorème. (E, d) métrique séparable. $\forall X, Y \in L_E(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on pose

$$d_{\mathbb{P}}(X, Y) \;=\; \mathbb{E}[1 \wedge d(X, Y)]$$

Alors : $d_{\mathbb{P}}$ est une distance sur $L_E(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ correspondant à la convergence en probabilité. Si (E, d) est complet, alors $(L_E(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), d_{\mathbb{P}})$ est complet.

Preuve.

- Si $d_{\mathbb{P}}(X, Y) = 0$, alors $1 \wedge d(X, Y)$ est nul presque-sûrement, donc presque-sûrement $d(X, Y) = 0$, donc $X \sim Y$.

  $d_{\mathbb{P}}$ est clairement symétrique.

  Inégalité triangulaire : soient $X, Y, Z \in L_E(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. (rappel : $1 \wedge (a + b) \leqslant 1 \wedge a + 1 \wedge b$)

  On a $1 \wedge d(X, Z) \leqslant 1 \wedge (d(X, Y) + d(Y, Z)) \leqslant 1 \wedge d(X, Y) + 1 \wedge d(Y, Z)$

  On a donc $d_{\mathbb{P}}(X, Z) \leqslant d_{\mathbb{P}}(X, Y) + d_{\mathbb{P}}(Y, Z)$ en passant a l'espérance.

- **Fait.** Si $a \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon \in]0, 1[$, alors $\frac{a}{\varepsilon} \wedge 1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(a \wedge 1)$.

  $\mathbf{1}_{\{d(X_n, X) > \varepsilon\}} \leqslant 1$ et $\mathbf{1}_{\{d(X_n, X) > \varepsilon\}} \leqslant \frac{d(X, X_n)}{\varepsilon}$, donc

  $$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{d(X_n, X) > \varepsilon\}} &\leqslant \frac{d(X, X_n)}{\varepsilon} \wedge 1 \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}(d(X_n, X) \wedge 1) \text{ si } \varepsilon \in]0, 1[\end{aligned}$$

  En prenant l'espérance, on obtient pour $\varepsilon \in]0, 1[$ que

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}(d(X_n, X) > \varepsilon) &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}(1 \wedge d(X_n, X)) \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon} d_{\mathbb{P}}(X_n, X) \end{aligned}$$

  Si $d_{\mathbb{P}}(X_n, X) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, alors $\lim_{n \to \infty} X_n = X$ en probabilités.

- Réciproquement,

  $$\begin{aligned} 1 \wedge d(X_n, X) &= (1 \wedge d(X, X_n)) \mathbf{1}_{\{d(X_n, X) < \varepsilon\}} + (1 \wedge d(X, X_n)) \mathbf{1}_{\{d(X_n, X) \geqslant \varepsilon\}} \\ &\leqslant 1 \wedge \varepsilon + \mathbf{1}_{\{d(X_n, X) \geqslant \varepsilon\}} \end{aligned}$$

  En prenant l'espérance, $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, on a $d_{\mathbb{P}}(X_n, X) \leqslant \varepsilon + \mathbb{P}(d(X_n, X) > \varepsilon)$

  Si $\lim_{n \to \infty} X_n = X$ en probabilités, on a $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, $\operatorname{limsup}_{n \to \infty} d_{\mathbb{P}}(X_n, X) \leqslant \varepsilon$, donc $\lim_{n \to \infty} d_{\mathbb{P}}(X_n, X) = 0$.

  Donc $d_{\mathbb{P}}$ métrise la convergence en probabilités.

- On suppose (E, d) complet. Soit $X_n \in L_E(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), n \in \mathbb{N}$ une suite de Cauchy pour la distance $d_{\mathbb{P}}$. Pour montrer que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ converge pour la distance $d_{\mathbb{P}}$, il suffit donc d'en extraire une sous-suite qui $d_{\mathbb{P}}$-converge.

  $\exists n_k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ une suite d'entiers strictement croissante, telle que $d_{\mathbb{P}}(X_{n_k}, X_{n_{k+1}}) < 2^{-2k}$.

  Donc :

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\left\{d\left(X_{n_k}, X_{n_{k+1}}\right) > \varepsilon\right\}}\right] &\leqslant \frac{1}{\varepsilon} d_{\mathbb{P}}(X_{n_k}, X_{n_{k+1}}) \\ &\leqslant \frac{2^{-2k}}{\varepsilon} \end{aligned}$$

  $\varepsilon = 2^{-k}$ donne :

  $$\mathbb{P}(d(X_{n_k}, X_{n_{k+1}}) > \varepsilon) \leqslant 2^{-k}$$

$\exists (k_l)_{l\geqslant 0}$ strictement croissante et $X\in L_E(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ tels que

$$\lim_{l\to\infty} d\big(X_{n_{k_l}}, X\big) \;=\; 0$$

Donc $\lim_{l\to\infty} X_{n_{k_l}} = X$ en probabilités. □

2013-12-18

VIII.4. La loi faible des grands nombres

Théorème. Soient $(X_n)_{n\geqslant 0}$ des VA réelles indépendantes de même loi. On suppose qu'elles ont un moment d'ordre 2 (c'est-à-dire $\mathbb{E}[X_n^2]<\infty$). Alors :

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{en proba}} \mathbb{E}[X_1]$$

Preuve. Soit $S_n = X_1+\cdots+X_n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n] &= n\,\mathbb{E}[X_1]\\
\mathrm{Var}(S_n) &\overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(S_n - n\,\mathbb{E}[X_1])^2]\\
&= \mathrm{Var}(X_1)+\cdots+\mathrm{Var}(X_n)\\
\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}[X_1]|>a) &\leqslant \frac{\mathrm{var}(S_n)}{a^2} = \frac{n\,\mathrm{Var}(X_1)}{a^2} \text{ (inégalité de Tchébychev)}
\end{aligned}$$

$a=\varepsilon\, n$, $n>0$.

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right) \;\leqslant\; \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□

La loi faible des grands nombres est vrai pour des variabes aléatoires de même loi, ayant des moments d'ordre 2 et telles que $\mathrm{Cov}(X_k,X_l)=0$ si $k\neq l$.

Par ailleurs, sous ces hypothèses, $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{L^2} \mathbb{E}[X_1]$ (ce qui implique une convergence en probas).

VIII.5. La loi du 0-1 de Kolmogorov

On a $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilités de référence.

Déf. Soit $\mathcal{T}\subset\mathcal{F}$ une sous-tribu. Elle est dite $\mathbb{P}$-triviale si $\forall A\in\mathcal{T}, \mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$.

Lemme. Soit $\mathcal{T}$ une tribu $\mathbb{P}$-triviale. On se donne $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $\mathcal{T}$-mesurable. Alors :

$$\exists x_0\in\mathbb{R} : \text{presque-sûrement } X = x_0$$

Preuve. $y\in\mathbb{R}$. $\{X\leqslant y\}\in\mathcal{T}$, donc $y\in\mathbb{R}\to\mathbb{P}(X\leqslant y)\in\{0,1\}$ est une fonction qui vaut 0 jusqu'à un certain x_0 et 1 après. □

Remarque. Plus généralement, soit (E,d) un espace métrique séparable complet. Soit $B\in\mathcal{B}(E)$. Soit $X:\Omega\to B$ qui est $(\mathcal{T},\mathcal{B}(B))$-mesurable. Alors :

$$\mathcal{T} \text{ est triviale} \Rightarrow \exists y\in B : \mathbb{P}\text{-presque sûrement } X = y$$

Preuve. $\exists C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $(B, \mathcal{B}(B))$ est isomorphe à $(C, \mathcal{B}(C))$. On se ramène à l'énoncé précédent. $\square$

Déf. Soit $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$ une suite de tribus. $\mathcal{T} = \bigcap_{n \geqslant 0} \sigma(\mathcal{G}_n,\ \mathcal{G}_{n+1},\ \mathcal{G}_{n+2},\ \ldots)$ est la *tribu asymptotique* des tribus $(\mathcal{G}_n)_{n \geqslant 0}$.

Convention. Soient X_n, $n \in \mathbb{N}$ des VA. Leur tribu asymptotique est la tribu asymptotique des $\mathcal{G}_n = \sigma(X_n)$, ie $\mathcal{T} = \bigcap_{n \geqslant 0} \sigma(X_{n+p}, p \in \mathbb{N})$.

Exemple (∗). Soient $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-mesurables. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, puis :

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \limsup_{n \to \infty} S_n = \infty \right\} \\ B &= \left\{ \sup_{n \geqslant 0} S_n = \infty \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \Leftrightarrow A &\Leftrightarrow \omega \in B \\ &\Leftrightarrow \sup_{p \geqslant 0} S_{n+p}(\omega) - S_n(\omega) = \infty \end{aligned}$$

$$A = B = \left\{ \sup_{p \geqslant 0} S_{n+p} - S_n = \infty \right\} \in \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$$

$$\text{donc } A = B \in \bigcap_{n \geqslant 0} \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$$

Théorème : loi du 0-1 de Kolmogorov. Soient $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$ une suite de tribus. On suppose qu'elles sont indépendantes. On note $\mathcal{T} = \bigcap_{n \geqslant 0} \sigma(\mathcal{G}_{n+p}, p \in \mathbb{N})$ leur tribu asymptotique. Alors : $\mathcal{T}$ est $\mathbb{P}$-triviale, c'est-à-dire $\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.

Preuve. On note $\mathcal{T}_n = \sigma(\mathcal{G}_{n+1+p}, p \in \mathbb{N})$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n)$.

On pose $\mathcal{F}_\infty = \sigma\big(\bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n\big) = \sigma(\mathcal{G}_n, n \in \mathbb{N})$. On note $\mathcal{T} = \bigcap_{n \geqslant 0} \mathcal{T}_n$.

Constatations :

1. $\mathcal{T}_n$ est indépendant de $\mathcal{F}_n$ (par indépendance par paquets).

2. $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_n$, donc $\mathcal{T}$ et $\mathcal{F}_n$ sont indépendantes.

3. $\mathcal{P} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$ est un pi-système ($\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$).

   $\mathcal{T}$ est indépendante de $\mathcal{P}$ par (2) (prenons $A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{P}$; $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $B \in \mathcal{F}_{n_0}$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$ car $\mathcal{F}_{n_0}$ indépendant de $\mathcal{T}$).

4. Par un théorème précédent, $\mathcal{T}$ est indépendante de $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_\infty$.

5. $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}_\infty$, donc par (4) $\mathcal{T}$ est indépendant de $\mathcal{T}$.

   On a donc $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(A)$, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$ ie $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. $\square$

VIII.6. La loi forte des grands nombres

Théorème. Soient $X_n : \Omega \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ des variables aléatoire $\mathcal{F}$-mesurables indépendantes de même loi intégrables ($\mathbb{E}[\,|X_n|\,] < \infty$). Alors :

$$\mathbb{P}\text{-presque sûrement } \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E}[X_1]$$

Preuve. On fixe $a \in \mathbb{R}$. Notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, et $S_n^* = X_2 + X_3 + \cdots + X_{n+1}$. Posons :

$$\begin{array}{rcl} M_n & = & \max(0, S_1 - a, S_2 - 2\,a, \ldots, S_n - n\,a) \\ M_n^* & = & \max(0, S_1^* - a, S_2^* - 2\,a, \ldots, S_n^* - n\,a) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} M_{n+1} & = & \max(0; S_1 - a; S_1 - a + S_1^* - a; \cdots; S_1 - a + S_n^* - n\,a) \\ & = & \max(0; S_1 - a + M_n^*) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} M_{n+1} & = & M_n^* + \max(-M_n^*, S_1 - a) \\ & = & M_n^* - \min(a - S_1, M_n^*) \\ \mathbb{E}[\min(a - S_1, M_n^*)] & = & \mathbb{E}[M_n^*] - \mathbb{E}[M_{n+1}] \end{array}$$

Or $(X_1, \ldots, X_n)$ a même loi que $(X_2, \ldots, X_{n+1})$, donc M_n a même loi que M_n^*, donc $F(X_1, \ldots, X_n)$ a même loi que $F(X_2, \ldots, X_{n+1})$. Par conséquent :

$$\mathbb{E}[M_n^*] \;=\; \mathbb{E}[M_n]$$

D'où

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{E}[\min(a - S_1, M_n^*)] & = & \mathbb{E}[M_n] - \mathbb{E}[M_{n+1}] \\ & & = & \mathbb{E}[M_n - M_{n+1}] \text{ ; } M_n - M_{n+1} \leqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \mathbb{E}[\min(a - S_1, M_n^*)] & \leqslant & 0 \quad \text{(lemme de Garsia)} \end{array}$$

- $S_1 = X_1$
- $\begin{cases} M_\infty = \sup_{n \geqslant 0} M_n = \lim_{n \to \infty} \uparrow M_n : \Omega \to [0, \infty] \ \mathcal{F}\text{-mesurable} \\ M_\infty^* = \sup_{n \geqslant 0} M_n^* = \lim_{n \to \infty} \uparrow M_n^* \end{cases}$

  M_n^* a même loi que M_n
- $\{M_\infty = \infty\} \in \mathcal{T} = \bigcap_{n \geqslant 0} \sigma(X_{n+p}, p \in \mathbb{N})$ (comme dans l'exemple $X_n' = X_n - a$).

  Par la loi du 0-1 de Kolmogorov, $\mathbb{P}(M_\infty = \infty) = \mathbb{P}(M_\infty^* = \infty) = 0$ ou 1.

Supposons que $\mathbb{P}(M_\infty = \infty) = \mathbb{P}(M_\infty^* = \infty) = 1$. $M_\infty^* = 1$ presque-surement, donc par convergence monotone $\mathbb{E}[\min(a - S_1, M_n^*)] \leqslant 0$, donc en faisant $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}[\min(a - S_1, M_\infty^*)] \;=\; \mathbb{E}[a - S_1]$$

Si $\mathbb{P}(M_\infty = \infty) = \mathbb{P}(M_\infty^* = \infty) = 1$, alors $\mathbb{E}[a - S_1] = a - \mathbb{E}[X_1 \leqslant 0]$, c'est-à-dire $a \leqslant \mathbb{E}[X_1]$. Par contraposée, si $a > \mathbb{E}[X_1]$, alors $\mathbb{P}(M_\infty = \infty) = \mathbb{P}(M_\infty^* = \infty) = 0$, c'est-à-dire presque-surement $M_\infty < \infty$. Donc presque-sûrement, $\forall n \geqslant 0$, $S_n - n\,a \leqslant M_\infty < \infty$, donc $\dfrac{S_n}{n} \leqslant a + \dfrac{M_\infty}{n}$.

On prend la lim sup : $\limsup_{n \to \infty} \dfrac{S_n}{n} \leqslant a$ presque-sûrement.

On a montré que $\forall a > \mathbb{E}[X_1]$, presque-sûrement $\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} < a$.

$$B_p \;=\; \left\{ \limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} \leqslant \mathbb{E}[X_1] + (36)^{-p} \right\}$$

On vient de montrer que $\mathbb{P}(B_p) = 1$. Donc $B = \bigcap_{p \geqslant 0} B_p \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{P}(B) = 1$, donc

$$B \;=\; \left\{ \limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} \leqslant \mathbb{E}[X_1] \right\}$$

Donc presque-sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leqslant \mathbb{E}[X_1]$$

Ce quiest vrai quelque soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ suite i.i.d. de V.A. intégrables.

On réapplique à $X_n' = -X$:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n'}{n} &\leqslant \mathbb{E}[X_1]' \quad \text{p.s.}\\
\limsup_{n\to\infty} \frac{-S_n}{n} &\leqslant -\mathbb{E}[X_1] \quad \text{p.s.}\\
\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} &\geqslant \mathbb{E}[X_1] \quad \text{p.s.}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_n]$$

□

Commentaire. La loi des grands nombres ancre dans le réel la théorie des probabilités.

Aiguille de Buffon. Lattes de plancher espacées de a, aiguille de longueur $2a$. On compte le nombre N_n de fois que l'aiguille atterrit sur deux lattes. Alors $\frac{n}{N_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$ (la convergence est lente, en gros $\frac{n}{N_n} \sim \pi + \frac{c}{\sqrt{n}}$).

Cette méthode de Buffon peut servir à calculer des intégrales de fonctions à de nombreuses variables, de manière approchée. On l'appelle maintenant méthode de Monte-Carlo.

2014-01-06

VIII.7. Théorème ergodique de Birkhoff

Théorème ergodique : Ludwig Boltzmann, 1844-1906. (géométrie des systèmes dynamiques)

On a $(G, *, e)$ un groupe (ou semi-groupe) et E un ensemble (souvent muni d'une structure). Le groupe G agit sur E :

$$\begin{aligned}
T_g &: E \to E\\
T_{g_1} \circ T_{g_2} &= T_{g_1 * g_2}\\
T_e &= \mathrm{id}_E
\end{aligned}$$

Par exemple on prend le semi-groupe $(\mathbb{N}, +, 0)$. On note $T_1 = \varphi$ (engendre toutes les actions). Système dynamique : (E, φ), E est un ensemble et $\varphi\colon E \to E$. On étudie les orbites des points $x \in E$: $O_x = \{\varphi^{\circ n}(x), n \in \mathbb{N}\}$ $(\varphi^{\circ 0} = \mathrm{id}_E)$.

Questions.

1. Quels sont les points x d'orbite finie ? Selon leur période ?

2. On suppose que E est muni d'une topologie. Parmi les points $x \in E$ d'orbite infinie, quels sont ceux d'orbite dense ?

$$x \in E \quad : \quad \overline{\{\varphi^{\circ n}(x), n \in \mathbb{N}\}} = E$$

Si un système dynamique admet un point x d'orbite dense, il est dit *topologiquement transitif*.

3. On peut s'intéresser au nombre de passages dans $A \subset E$ de l'orbite de $x \in E$, ie aux quantités :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(\varphi^{\circ k}(x))$$

Supposons que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(\varphi^{\circ k}(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_x(A) \in [0,1]$$

existe pour tout $A \in \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est une algèbre.

On voit que $\mu_x : \mathcal{A} \to [0,1]$ est une fonction additive d'ensembles.

On remarque ici que :

$$\mu_x(\varphi^{-1}(A)) \;=\; \mu_x(A)$$

Déf. On dit que $(E, \mathcal{E}, \mu, \varphi)$ est un *système dynamique mesurable* si

1. $(E, \mathcal{E}, \mu)$ est un espace de probabilités
2. $\varphi : E \to E$ est $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$-mesurable
3. μ est φ-invariante, ie $\forall A \in \mathcal{E},\ \mu(\varphi^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Théorème de récurrence de Poincaré. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu, \varphi)$ un système dynamique mesurable. Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(A) > 0$. Alors : pour μ-presque tout $x \in A$, il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\varphi^{\circ n} \in A$ (pour μ-presque tout $x \in A$, l'orbite de x visite A une infinité de fois).

Conseil de lecture : Furstenberg, *Combinatorial Ergodic Theory* (lire les 30 premières pages). Autre ouvrage de Tao-Vu.

Preuve. On note $\varphi^{-n}(C) = \{x \in E : \varphi^{\circ n}(x) \in C\}$ (notation).

On pose $B_n = \bigcup_{p \geqslant n} \varphi^{-p}(A) = \{x \in E : \exists p \geqslant n : \varphi^{\circ p}(x) \in A\}$.

- $B_n \in \mathcal{E}$ ($\varphi^{-n-1}(C) = \varphi^{-1}(\varphi^{-n}(C))$, $\forall C \in \mathcal{E}$)
- $B_{n+1} \subset B_n$

Comme μ est φ-invariante et comme $B_n = \varphi^{-n}(B_0)$, on a $\mu(B_n) = \mu(B_0)$, comme $B_n \subset B_0$, on a $\mu(B_0 \setminus B_n) = 0$.

On pose $B = \bigcap_{n \geqslant 1} B_n$. $B_0 \setminus B = \bigcup_{n \geqslant 0} B_0 \setminus B_n$, donc $\mu(B_n \setminus B) = 0$.

Or $A \subset B_0$ donc $\mu(A \setminus B) = 0$. Or $A \setminus B = \{x \in E : \#\{n \in \mathbb{N} : \varphi^{\circ n}(x) \in A\} < \infty\}$ □

Paradoxe de Zermelo. Conteneur contenant un gaz, divisé en deux parties C_1, C_2. La probabilité que toutes les molécules se retrouvent d'un côté est strictment positive.

Systèmes dynamiques ergodiques

Déf. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu, \varphi)$ un système dynamique mesurable. On note $\mathcal{E}_\varphi$ la classe des ensembles φ-invariants (on vérifie que c'est une tribu) :

$$\mathcal{E}_\varphi = \{A \in \mathcal{E} : \varphi^{-1}(A) = A\}$$

Exemple. $(E, \mathcal{E}, \mu, \varphi)$. $f: E \to \mathbb{R}$, $\mathcal{E}$-mesurable.

On pose : $S_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $S_n = f + f \circ \varphi + \dots + f \circ \varphi^{\circ n-1}$. $S_n: E \to \mathbb{R}$, $\mathcal{E}$-mesurable.

On pose $A = \{x \in E : \sup_{n \geqslant 0} S_n(x) = \infty\}$.

Clairement $A \in \mathcal{E}_\varphi$. En effet : $\forall x \in E, S_n(x) \neq \infty$; $\sup_{n \geqslant 0} S_n(x) = \infty$ ssi $\sup_{n \geqslant 0} (S_{n+1}(x) - S_1(x)) = \infty$ ssi $\sup_{n \geqslant 0} s_n \circ \varphi = \infty$. $x \in A$ ssi $\varphi(x) \in A$, donc $\varphi^{-1}(A) = A$.

Déf. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu, \varphi)$ un système dynamique mesurable. Il est dit *ergodique* si $\mathcal{E}_\varphi$ est μ-trivial, c'est-à-dire $\forall A \in \mathcal{E}$, $\varphi^{-1}(A) = A \Rightarrow \mu(A) \in \{0, 1\}$.

Théorème ergodique de Birkhoff (1932). Soit $(E, \mathcal{E}, \mu, \varphi)$ un système dymanique mesurable. On le suppose ergodique. <u>Alors :</u> $\forall f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, on a

$$\text{pour } \mu\text{-presque tout } x, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^{\circ k}(x)) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

Preuve. On pose $S_0 = S_0^* = 0$ et pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} S_n &= f + f \circ \varphi + \dots + f \circ \varphi^{\circ n-1} \\ S_n^* &= f \circ \varphi + f \circ \varphi^{\circ 2} + \dots + f \circ \varphi^{\circ n} \\ &= S_n \circ \varphi \end{aligned}$$

On fixe $a \in \mathbb{R}$ et on pose :

$$\begin{aligned} M_n &= \max_{0 \leqslant k \leqslant n} (S_k - a\,k) \\ M_n^* &= \max_{0 \leqslant k \leqslant n} (S_k^* - a\,k) \end{aligned}$$

On observe que $0 \leqslant M_n \leqslant M_{n+1}$ et $0 \leqslant M_n^* \leqslant M_{n+1}^*$.

On pose : $M_\infty = \sup_{n \geqslant 0} M_n = \lim_{n \to \infty} M_n : E \to [0, \infty]$ $\mathcal{E}$-mesurable

et $M_\infty^* = \sup_{n \geqslant 0} M_n^* = \lim_{n \to \infty} M_n^* : E \to [0, \infty]$ $\mathcal{E}$-mesurable.

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \max(0, f - a, f - a + f \circ \varphi - a, \dots, f - a + (f \circ \varphi + f \circ \varphi^{\circ n-1} - n\,a)) \\ &= \max(0, f - a, f - a + S_1^* - a, \dots, f - a + S^* - n\,a) \\ &= \max(0, f - a + M_n^*) \\ &= M_n^* + f + \max(-f - M_n^*, -a) \\ \text{(A)} \qquad M_{n+1} &= M_n^* + f - \min(a, M_n^* + f) \end{aligned}$$

Les M_n et les M_n^* sont μ-intégrables (comme max de fonctions μ-intégrables).

Oublions pour plus de clarté que μ est φ-invariante, et notons ν la mesure image de μ par φ ($\nu = \mu \circ \varphi^{-1}$).

$$\begin{aligned} M_n^* &= M_n \circ \varphi \\ \int_E M_n^* \,\mathrm{d}\mu &= \int_E M_n \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_E M_n \,\mathrm{d}\nu \text{ (par le thm de transfert)} \end{aligned}$$

Or μ est φ-invariante, donc $\mu = \nu$, donc $\int_E M_n^* \,\mathrm{d}\mu = \int_E M_n \,\mathrm{d}\mu$.

Par (A), on a :

$$\begin{aligned}
\int_E M_{n+1}\,\mathrm{d}\mu &= \int_E M_n\,\mathrm{d}\mu + \int_E f\,\mathrm{d}\mu - \int_E \min(a, M_n^* + f)\,\mathrm{d}\mu \\
\int_E \underbrace{(M_{n+1} - M_n)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}\mu &= \int_E f\,\mathrm{d}\mu - \int_E \min(a, M_n^* + f)\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu \ \geqslant \ \int_E \min(a, M_n^* + f)\,\mathrm{d}\mu$$

Or $|\min(a, M_n^* + f)| \leqslant |a| + |f|$ qui est μ-intégrable. Par convergence dominée :

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu \ \geqslant \ \int_E \min(a, M_\infty^* + f)\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{(G)}$$

On pose $A = \{M_\infty = \infty\}$: il est φ-invariant (voir un exemple précédent). Donc $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

On suppose que $\mu(A) = 1$

$\{M_\infty \circ \varphi = \infty\} = \varphi^{-1}(A) = \{M_\infty^* = \infty\}$, donc $\mu(\{M_\infty^* = \infty\}) = 1$

μ-preque partout $M_\infty^* = \infty$. Par (G), on a $\int_E f\,\mathrm{d}\mu \geqslant a$.

Par contraposée, on a prouvé que $\forall a > \int_E f\,\mathrm{d}\mu$, $\mu(\{M_\infty = \infty\}) = 0$, c'est-à-dire μ-presque partout $M_\infty < \infty$. Donc μ-pp $\forall n \geqslant 0$ $S_n - a\,n \leqslant M_\infty < \infty$.

$$\forall a > \int_E f\,\mathrm{d}\mu, \quad \mu\text{-pp} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leqslant a$$

(raisonnement idiot) On pose $a_p = 2^{-p} + \int_E f\,\mathrm{d}\mu$, $A_p = \left\{x \in E : \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} \leqslant a_p\right\}$.

On sait que $A_1 \in \mathcal{E}$ et $\mu(A_p) = 1$.

Donc $\mu\big(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p\big) = 1$. $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p = \left\{x \in E : \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} \leqslant \int_E f\,\mathrm{d}\mu\right\}$ Donc :

$$\mu\text{-preque partout}, \qquad \operatorname*{limsup}_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \ \leqslant \ \int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

$$\mu\text{-preque partout}, \qquad \operatorname*{limsup}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^{\circ n}(x)) \ \leqslant \ \int_E f\,\mathrm{d}\mu \qquad (*)$$

On applique $(*)$ à $(-f)$ et on obtient :

$$\mu\text{-preque partout}, \qquad \operatorname*{liminf}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^{\circ k}(x)) \ \geqslant \ \int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

Donc :

$$\mu\text{-presque partout}, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^{\circ k}(x)) \ = \ \int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

□

Commentaires.

On a $(E, \mathcal{E}, \mu, \varphi)$ système dynamique mesurable ergodique. On suppose que E est muni d'une topologie séparable : il est engendré par une base dénombrable (U_p) d'ouverts.

$$\mu\text{-preque partout,} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n} \sum \mathbf{1}_{U_p}(\varphi^{\circ k}(x)) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu(U_p) > 0$$

(on suppose que le support de μ est E). Alors le système est topologiquement transitif.

Exemple. Rotations d'angle irrationnel. On pose $E = [0,1[$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}([0,1[)$, $\varphi(x) = x + \theta - \lfloor x + \theta \rfloor$ (c'est $x + \theta$ « modulo 1 »). On suppose que θ est irrationnel. Exercice : il n'y a pas d'orbite finie.

Théorème. Sous les hypothèses précédentes. On note l la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1[$. Alors l est φ-invariante et φ est l-ergodique.

Preuve. l est φ-invariante : laissé en exo.

Montrons que φ est ergodique : Soit $A \in \mathcal{B}([0,1[)$ qui est φ-invariant : $\varphi^{-1}(A) = A$.

On s'intéresse à la fonction $f = \mathbf{1}_A \in \mathcal{L}^1([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), l)$. On étend f en une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-périodique.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \int_{[0,1[} e^{-2i\pi n x} f(x)\, \mathrm{d}x$.

$f \circ \varphi = f \implies c_n(f) = \int_{[0,1[} e^{2i\pi n x} f(x + \theta)\, \mathrm{d}x = e^{2i\pi\theta} c_n(f)$

Comme θ est irrationnel, $\forall n \neq 0$ $c_n(f) = 0$.

$c_0(f) = l(A)$. f a les mêmes coefficients de Fourier que la fonction constante égale à $l(A)$.

$\mathbf{1}_A = l(A)$ μ-presque partout, donc $l(A) \in \{0, 1\}$. Le théorème est prouvé.

Exercice. Action de $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur le tore $\mathbb{T}$. Soit $y \in \mathbb{R}$, on note $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$ sa partie fractionnaire. $\mathbb{T} = [0,1[\times [0,1[$. Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\{v\} = \begin{pmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{pmatrix}$.

On pose $\varphi(v) = \{M v\} = \begin{pmatrix} \{2x + y\} \\ \{x + y\} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\{v \in \mathbb{T} : \exists n \in \mathbb{N} : \varphi^{\circ n}(v) = v\} = \mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{T}$

2. On note l_2 la mesure de Lebesgue restreinte à $\mathbb{T}$. Montrer qu'on a un système dynamique ergodique $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), l_2, \varphi)$.

2014-01-08

IX. Convergence en loi, théorème central limite

Motivation. Expérience au palais de la découverte : des billes tombent et sont déviées aléatoirement par plusieurs rangées de clous (à chaque rangée, vers la gauche ou vers la droite). La répartition du nombre de billes dans chaque colonne approche la fonction e^{-x^2}.

IX.1. Définition et propriétés générales

On se place dans (E, d) un espace métrique séparable (séparabilité optionnelle pour une grande partie des définitions).

On note :

- $C_b(E)$ l'ensemble des fonctions continues bornées,

- $\mathrm{Lip}_b(E)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes bornées

- $\mathcal{M}_f(E)$: l'ensemble des mesures $\mu\colon\mathcal{B}(E)\to\mathbb{R}_+$ de masse finie
- $\mathcal{M}_1(E)$: l'ensembles des mesures $\mu\colon\mathcal{B}(E)\to[0,1]$ de probabilités ($\mu(E)=1$).

On prend $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilités de référence.

Si $X\colon\Omega\to E$ est $(\mathcal{F},\mathcal{B}(E))$-mesurable, on note μ_X sa loi : $\mu_X\in\mathcal{M}_1(E)$ et est donnée par :

$$\mu_X(B)=\mathbb{P}(X\in B), B\in\mathcal{B}(E)$$

Définitions.

1. Soient $\mu,\mu_n\in\mathcal{M}_f(E), n\in\mathbb{N}$. Alors la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge étroitement* vers μ ssi :

$$\forall f\in C_b(E),\ \lim_{n\to\infty}\int_E f\,\mathrm{d}\mu_n\to\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

2. Soient $X,X_n\colon\Omega\to E, n\in\mathbb{N}$ $(\mathcal{F},\mathcal{B}(E))$-mesurables. Alors : la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi* vers X si la suite des lois $(\mu_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers μ_X.

   Autrement dit :

$$\forall f\in C_b(E),\ \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[f(X_n)]=\mathbb{E}[f(X)]$$

   (puisque $\mathbb{E}[f(X_n)]=\int_E f(x)\mu_{X_n}(\mathrm{d}x)$ par le théorème de transfert, de même à droite)

Notation. $X_n\Longrightarrow X$ signifie que $X_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}}X$.

Rappel. Soient $\mu,\nu\in\mathcal{M}_f(E)$ deux mesures finies. Alors :

$$\left(\forall f\in\mathrm{Lip}_b(E),\ \int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_E f\,\mathrm{d}\nu\right)\Leftrightarrow\mu=\nu$$

Cela implique immédiatement le lemme suivant :

Lemme. Soient μ, ν, $\mu_n\in\mathcal{M}_f(E)$, $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mu$ étroitement et $\lim_{n\to\infty}\mu_n=\nu$. <u>Alors :</u> $\mu=\nu$.

Remarque. La convergence étroite des mesures finies est métrisable (résultat difficile).

Proposition. Soit $\mu_n\in\mathcal{M}_1(E), n\in\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $\mu\in\mathcal{M}_1(E)$ telle que pour toute suite strictement croissante d'indices $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, il existe une suite strictement croissante d'indices $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que : $\lim_{l\to\infty}\mu_{n_{k_l}}=\mu$ étroitement. <u>Alors :</u> $\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mu$ étroitement.

Preuve. On se donne $f\in C_b(E)$. On pose $u_n=\int_E f\,\mathrm{d}\mu_n$. Alors : $|u_n|<\|f\|_\infty$.

On pose $u^*=\limsup_{n\to\infty}u_n\in[-\|f\|_\infty,\|f\|_\infty]$.

Il existe n_k telle que $u_{n_k}\to u^*$.

Par hypothèse, il existe $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'indices telle que $\mu_{n_{k_l}}\xrightarrow[l\to\infty]{}\mu$ étroitement. Donc $\lim_{l\to\infty}u_{n_{k_l}}=\int_E f\,\mathrm{d}\mu$.

Donc $u^*=\limsup_{n\to\infty}\int_E f\,\mathrm{d}\mu_n=\int_E f\,\mathrm{d}\mu$.

On raisonne de même pour la limite inférieure : $\liminf_{n\to\infty}\int_E f\,\mathrm{d}\mu_n=\int_E f\,\mathrm{d}\mu$.

Donc $\lim_{n\to\infty}\int_E f\,\mathrm{d}\mu_n=\int_E f\,\mathrm{d}\mu$, $\forall f\in C_b(E)$. $\square$

Exercice. Étendre la proposition à toutes les mesures de $\mathcal{M}_f(E)$.

Théorème de Portmanteau (du à Alexandroff). Soit (E, d) un espace métrique séparable. On se donne $\mu, \mu_n \in \mathcal{M}_1(E), n \in \mathbb{N}$. Alors il est équivalent de dire :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ étroitement
2. $\forall f \in \mathrm{Lip}_b(E),\ \lim\limits_{n\to\infty} \int_E f\,\mathrm{d}\mu_n = \int_E f\,\mathrm{d}\mu$
3. $\forall F \subset E$, F fermé, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$
4. $\forall O \subset E$, O ouvert, $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(O) \geqslant \mu(O)$
5. $\forall A \in \mathcal{B}(E)$ tel que $\mu(\bar{A}) = \mu(\mathring{A})$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$
6. $\forall f : E \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(E)$-mesurable bornée telle que l'ensemble de ses points de discontinuité est μ-négligeable, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f\,\mathrm{d}\mu_n = \int_E f\,\mathrm{d}\mu$

Portmanteau's theorem : vient du livre *Convergence in Probability Mesures* de P.Billingsley, le nom (théorème de Jean-Pierre Portmanteau) est évidemment un canular du à l'auteur de ce livre.

Preuve.

- $(1) \Rightarrow (2)$, $(6) \Rightarrow (1)$: trivial.
- $(3) \Leftrightarrow (4)$: par passage au complémentaire.
- $(2) \Rightarrow (3)$: On suppose (2) et on fixe $F \subset E$ un fermé.

  On note $\Phi_p(x) = (1 - p\, d(x, F))_+$, $x \in E$, $p \in \mathbb{N}$. $\Phi \in \mathrm{Lip}_b(E)$.

  $1 \geqslant \Phi_p \geqslant \Phi_{p+1} \geqslant \mathbf{1}_F$, et $\lim_{p\to\infty} \Phi_p = \mathbf{1}_F$ ponctuellement.

  $$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_E \Phi_p\,\mathrm{d}\mu_n \\ &= \int_E \Phi_p\,\mathrm{d}\mu \quad \text{par (2)}\end{aligned}$$

  Donc $\forall p \geqslant 0$, $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(f) \leqslant \int_E \Phi_p\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[p\to\infty]{\downarrow} \mu(F)$ par convergence dominée.

- (3) ou (4) $\Rightarrow$ (5) : on se donne $A \in \mathcal{B}(E)$. $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$.

  Par (3) et (4) (qui sont équivalentes), on va avoir :

  $$\mu(\mathring{A}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{A}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leqslant \limsup \mu_n(\bar{A}) \leqslant \mu(\bar{A})$$

  Donc si $\mu(\mathring{A}) = \mu(\bar{A})$, on a des égalités et $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

- (5) $\Rightarrow$ (6) : Soit $f : E \to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{B}(E)$-mesurable. On note C l'ensemble des points de continuité de f et $D = E \setminus C$ l'ensemble des points de discontinuité de f.

  On a prouvé que C et D sont des Boréliens. (5) signifie que $\mu(D) = 0$, c'est-à-dire $\mu(C) = \mu(E) = 1$.

  On note l la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On suppose f bornée et on note $c = \|f\|_\infty$.

$\forall \nu \in \mathcal{M}_f(E)$, $\int_E f\,\mathrm{d}\nu = \int_E \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}} l(\mathrm{d}y) \mathbf{1}_{\{0 \leqslant y \leqslant f(x)\}}$. On peut utiliser Fubini positif :

$$\int_E f\,\mathrm{d}\nu = \int_{[0,c]} l(\mathrm{d}y) \int_E \nu(\mathrm{d}x)\, \mathbf{1}_{\{0 \leqslant y \leqslant f(x)\}}$$

On pose $A_y = \{f \geqslant y\} \in B(E)$, on a finalement :

$$\int_E f\,\mathrm{d}\nu = \int_{[0,c]} l(\mathrm{d}y)\, \nu(A_y)$$

$\forall y \in [0,c]$, on pose $B_y = \{f > y\}$ et $s(y) = \mu(A_y)$. s décroît.

Si $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\downarrow} y$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{y_n} = B_y$. $\lim_{n\to\infty} s(y_n) = s(y^+) = \mu(B_y)$

$$\{y \in [0,c] : \mu(A_y) > \mu(B_y)\} \subset \{y \in [0,c] : s(y^+) > s(y)\} \qquad (\bullet)$$

On montre ensuite que $B_y \cap C \subset \mathring{A}_y \subset A_y \subset \overline{A_y} \subset A_y \cup D$ $(*)$.

Preuve de $(*)$:

Soit $x \in B(y) \cap C$. $f(x) > y$, f continue en x. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall z \in B(x,\varepsilon)$, $f(z) > y$. Donc $B(x,\varepsilon) \subset A_y$, donc $x \in \mathring{A}_y$.

Supposons $x \in \overline{A_y} \setminus A_y$. Donc $f(x) < y$. Il existe $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x$ tel que $f(x_n) \in A_y$, c'est-à-dire $f(x_n) > y$. Donc f n'est pas continue en x, donc $x \in D$.

Or $\mu(B_y) = \mu(B_y \cap C)$ et $\mu(A_y) = \mu(A_y \cup D)$.

Donc :

$$\begin{aligned}\{y\in[0,c] : \mu(\overline{A_y}) > \mu(A_y)\} &\subset \{y\in[0,c] : \mu(A_y) > \mu(B_y)\} \\ &\subset \{y \in [0,c] : s(y^+) > s(y)\}\end{aligned}$$

ce dernier étant dénombrable donc Lebesgue-négligeable.

Pour l-presque tout $y \in [0,c]$, $\mu(\overline{A_y}) = \mu(\mathring{A}_y)$. Par (5), $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A_y) = \mu(A_y)$.

Pour l-presque tout $y \in [0,c]$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A_y) = \mu(A_y)$ et par convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,c]} l(\mathrm{d}y) \mu_n(A_y) = \int_{[0,c]} l(\mathrm{d}y) \mu(A_y)$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f\,\mathrm{d}\mu_n = \int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

On étend ce résultat aux fonctions mesurables bornées réelles dont les points de discontinuité sont μ-négligeables. □

Théorème. Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques séparables. Soit $\Phi : E \to E'$ Borel-mesurable. Soient $X, X_n : \Omega \to E, n \in \mathbb{N}$ $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(E))$-mesurables. On fait les hypothèse suivantes :

a) $X_n \overset{\text{loi}}{\Longrightarrow} X$

b) $\mathbb{P}$-presque-sûrement Φ est continue en X

<u>Alors :</u> $\Phi(X_n) \overset{\text{loi}}{\Longrightarrow} \Phi(X)$.

Preuve. Soit $g \in C_b(E')$. $g \circ \Phi \colon E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée et ses points de discontinuité sont μ_X-négligeables. Par Portmanteau et (a),

$$\mathbb{E}[g(\Phi(X_n))] = \int_E g \circ \Phi \, \mathrm{d}\mu_{X_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_E g \circ \Phi \, \mathrm{d}\mu_X = \mathbb{E}[g(\Phi(X))]$$

□

Proposition. Soit (E, d) un espace métrique séparable. Soit $X, X_n \colon \Omega \to E$ $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(E))$-mesurables. On suppose que $\lim_{n \to \infty} X_n = X$ en probabilités. Alors : $X_n \overset{\text{loi}}{\Longrightarrow} X$.

Preuve. Soit f une fonction k-lipschitzienne bornée.

$$\alpha = |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leqslant \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)|]$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha &\leqslant \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)| \, \mathbf{1}_{\{d(X_n, X) > \varepsilon\}}] \\ &\quad + \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)| \, \mathbf{1}_{\{d(X_n, X) \leqslant \varepsilon\}}] \\ &\leqslant 2 \, \|f\|_\infty \, \mathbb{P}(d(X_n, X) > \varepsilon) + k \, \varepsilon \\ \limsup_{n \to \infty} |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| &\leqslant k \, \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

□

Exercice. Si $X_n \overset{\text{loi}}{\Longrightarrow} x$ (x constante), alors $\lim_{n \to \infty} X_n = x$ en probabilités.

IX.2. Convergence en loi sur $\mathbb{R}$

Déf. Soit $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue à droite, croissante, telle que $\lim_{+\infty} F = 1$ et $\lim_{-\infty} F = 0$. F est appellée *fonction de répartition.* On note $\mathrm{Rep}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de répartition (notation non standard).

Rappel : FAIT. Soit $F \in \mathrm{Rep}(\mathbb{R})$. On pose $\forall y \in]0, 1[$, $F^{-1}(y) = \inf \{x \in \mathbb{R} \colon F(y) > x\}$. F^{-1} est le pseudo-inverse continu à droite de F.

On note μ la mesure image de la mesure de Lebesgue l sur [0, 1] par F^{-1} : $\mu(B) = l(\{y \in]0, 1[\colon F^{-1}(y) \in B\})$.

Alors : $\mu(]-\infty, x]) = F(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, donc μ est la mesure de Stieltjes associée F ($\mu = \mathrm{d}F$).

Point de vue probabiliste. On se donne $U \colon \Omega \to [0, 1]$ $\mathcal{F}$-mesurable de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X = F^{-1}(U)$. Alors : X a pour loi μ et $\mathbb{P}(X \leqslant x) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Lemme. Soient $F_n, F \in \mathrm{Rep}(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que f continue en x, on a $\lim_{n \to \infty} F_n(X) = F(X)$. Alors : $\forall y \in]0, 1[$ tel que F^{-1} continue en y, on a $\lim_{n \to \infty} F_n^{-1}(x) = F^{-1}(x)$.

Preuve. En exo (à faire !)

Théorème. $\mu, \mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{n \to \infty} \mu_n = \mu$ en loi (étroitement)

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $\mu(\{x\}) = 0$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(]-\infty, x]) = \mu(]-\infty, x])$$

Preuve. $(1) \Rightarrow (2)$: c'est le théorème de Portmanteau appliqué à $A =]-\infty, x] = \bar{A}$ et $\mathring{A} =]-\infty, x[$

$(2) \Rightarrow (1)$: Soit $f \in C_b(\mathbb{R})$. On note $F_n(x) = \mu_n(]-\infty, x])$ et $F(x) = \mu(]-\infty, x])$. $F_n, F \in \mathrm{Rep}(\mathbb{R})$.

(2) implique que $\forall x \in \mathbb{R}$ point de continuité de F, $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$. Donc par le lemme précédent, $\forall y \in]0,1[$ point de continuité de F^{-1}, $\lim_{n \to \infty} F_n^{-1}(y) = F^{-1}(y)$.

On remarque que :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu_n = \int_{]0,1[} f(F_n^{-1}(y)) \, l(\mathrm{d}y) \text{ par le fait rappellé précédemment}$$

F^{-1} est croissante continue à droite : ses points de discontinuité sont dénombrables, donc Lebesgue-négligeables. Donc par convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \int_{]0,1[} F_n^{-1}(y) \, l(\mathrm{d}y) &= \int_{]0,1[} f(F^{-1}(y)) \, l(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

□

Corollaire. X_n, X V.A. réelles $\mathcal{F}$-mesurables.

$$X_n \overset{\text{loi}}{\Longrightarrow} X \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbb{P}(X = x) = 0, \text{ on a : } \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

2014-01-13

Théorème de représentation de Skorohod (dans $\mathbb{R}$). Soient μ_n, $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\lim_{n \to \infty} \mu_n = \mu$ étroitement. Alors il existe $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et X_n, $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-mesurables, telles que :

1. La loi de X_n est μ_n, $n \in \mathbb{N}$ et la loi de X est μ
2. $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} X$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Preuve. Soit $F_n(x) = \mu_n(]-\infty, x])$ la fonction de répartition de μ_n, $F(x) = \mu(]-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$.

$\exists (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $U : \Omega \to [0,1]$ $\mathcal{F}$-mesurable uniforme telle que $X_n = F_n^*(U)$, $X = F^*(U)$.

$\mu_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu$ étroitement $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ où F est continue, $F_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} F(x) \Rightarrow \forall y \in]0,1[$ tel que F^* est continu en y, $\lim_{n \to \infty} F_n^*(y) = F^*(y)$.

$\mathbb{P}$-presque sûrement, F^* est continue en U.

Donc $X_n \to X$ presque-sûrement. □

IX.3. Théorème central-limite

IX.3.a. Variables gaussiennes

On a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités de référence.

Déf. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle $\mathcal{F}$-mesurable. Elle est *gaussienne* (de loi gaussienne) de moyenne m et de variance σ^2 si elle admet la densité :

$$g_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}(x - m)^2\right)$$

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bornée ou $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$, mesurable, alors :

$$\mathbb{E}[f(x)] = \int_{\mathbb{R}} g_{m,\sigma}(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

On le note $X\sim\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Synonyme : loi normale de moyenne m et de variance σ^2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} g_{m,\sigma}(x)\, x\,\mathrm{d}x \\ &= m \\ \mathrm{var}(X) &= \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2\, g_{m,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

Une loi gaussienne est entièrement caractérisée par son espérance et sa variance.

Convention. $X\sim\mathcal{N}(m,0)$ si $X=m$ presque-sûrement.

Fonction caractéristique. Si $X\sim\mathcal{N}(m,\sigma^2)$,

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_x}(u) &= \mathbb{E}[e^{iuX}] \\ &= \hat{g}_{m,\sigma^2}(u) \\ &= \exp\left(i\,u\,m-\frac{\sigma^2}{2}u^2\right)\end{aligned}$$

$$\forall z\in\mathbb{C},\qquad \mathbb{E}[\exp(z\,X)] = \exp\left(m\,z+\frac{\sigma^2}{2}\,z^2\right) \text{ fonction analytique dans } \mathbb{C}$$

Pour mémoire. Si $X\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, alors $\mathbb{E}[X^{2n+1}]=0$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^{2n}] &= \frac{(2\,n)!}{2^n\,(n!)}\sigma^{2n} \\ &= \sigma^{2n}\underbrace{(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 5\times 3\times 1}_{\text{souvent noté } (2n-1)!!}\end{aligned}$$

Proposition. Soient $X_1\sim\mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$, ..., $X_n\sim\mathcal{N}(m_n,\sigma_n^2)$ indépendantes. Soient a_1, ..., $a_n\in\mathbb{R}$. Alors : $X=a_1X_1+\cdots+a_nX_n\sim\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, où $m=a_1\,m_1+\cdots+a_n\,m_n$, et $\sigma^2=a_1^2\,\sigma_1^2+\cdots+a_n^2\,\sigma_n^2$.

Preuve. Soit $u\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{iuX}] &= \mathbb{E}[e^{iua_1X_1}]\cdots\mathbb{E}[e^{iua_nX_n}] \\ &= e^{ium_1a_1-\frac{1}{2}a_1^2\sigma_1^2u^2}\times\cdots\times e^{ium_na_n-\frac{1}{2}a_n^2\sigma_n^2u^2} \\ &= e^{ium-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}\end{aligned}$$

On conclut par injectivité de la transformée de Fourier. □

Théorème de De Moivre-Laplace. Soit $(X_n)_{n\geqslant1}$ de variables aléatoires de Bernouilli de paramètre p indépendantes : $\mathbb{P}(X_n=1)=p$, $\mathbb{P}(X_n=0)=1-p$. $\mathbb{E}[X_n]=p$, $\mathrm{var}(X_n)=p(1-p)=\sigma^2\leqslant\frac{1}{4}$. Loi des grands nombres :

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} p \text{ presque-sûrement}$$

Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(S_n) &= \mathbb{E}[(S_n - n\,p)^2] \\ &= n\,\sigma^2 \\ \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p\right)^2\right] &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

En un sens, $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ou :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \simeq p + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} X, \quad \text{avec } X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Formellement : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$,

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sigma}, \left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p\right) \leqslant b\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$$

Preuve. Élémentaire : $S_n = \text{Binomiale}(n, p)$. Calculs explicites avec Stirling. □

IX.3.b. Vecteurs gaussiens

Déf. $X = (X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}$-mesurable, est un *vecteur gaussien* ssi $\forall u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d$, $\langle u, X \rangle = u_1 X_1 + \cdots + u_d X_d$ est une variable aléatoire réelle gaussienne.

Lemme. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{F}$-mesurable vecteur gaussien. Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Alors $M\,X$ est un vecteur gaussien.

Preuve. Immédiate... □

Exemple. Soient $X_1, \ldots, X_d$ des variables aléatoires $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes. Alors $X = (X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur gaussien.

En effet, soit $u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d$. $\mathbb{E}\left[e^{i\langle u/x \rangle}\right] = \mathbb{E}[e^{i u_1 X_1}] \cdots \mathbb{E}[e^{i u_d X_d}] = \exp\left(\frac{-1}{2}(u_1^2 \cdots u_d^2)\right)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathbb{E}\left[e^{i\lambda \langle u, X \rangle}\right] = \exp\left(\frac{-1}{2}\|u\|^2 \lambda^2\right)$, donc $\langle u, X \rangle \sim \mathcal{N}(0, \|u\|^2)$.

Faits (rappels). $X = (X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{F}$-mesurable. On suppose que $\mathbb{E}[\|X\|^2] < \infty$.

On note $v_X = (\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_d])$ le vecteur moyenne de X, et $\Gamma_X = (\ \operatorname{cov}(X_i, X_j)\ )_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ la matrice de covariance de X.

Si $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{cases} \Gamma_{MX} = M\,\Gamma_X\,M^* \\ v_{MX} = M\,v_X \end{cases}$$

Car : $\mathbb{E}[\langle u, X \rangle] = \langle u, v_X \rangle$ et $\operatorname{var}(\langle u, X \rangle) = \langle u, \Gamma_X\,u \rangle$.

Prop. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur gaussien. On note v son vecteur moyenne et Γ sa matrice de covariance. Alors :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{R}^d, \quad \langle u, X \rangle &\sim \mathcal{N}(\langle u, v \rangle, \langle u, \Gamma\,u \rangle) \\ \widehat{\mu_X}(u) &= \mathbb{E}[\exp(i\langle u, X \rangle)] \\ &= \exp\left(i\langle u, v \rangle - \frac{1}{2}\langle u, \Gamma\,u \rangle\right) \end{aligned}$$

La loi de X est caractérisée par v et Γ. On note cela :

$$X \ \sim \ \mathcal{N}(v, \Gamma)$$

Preuve. $\langle u, X\rangle \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ par définition d'un vecteur gaussien, où

$$\begin{aligned} m &= \mathbb{E}[\langle u, X\rangle] \\ &= \langle u, v\rangle \\ \sigma^2 &= \mathrm{var}(\langle u, X\rangle) \\ &= \langle u, \Gamma\, u\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[e^{i1\langle u, X\rangle}\big] &= e^{im1} e^{\frac{-1}{2}\sigma^2 1} \\ &= \exp\left(i\langle u, v\rangle - \frac{1}{2}\right)\langle u, \Gamma\, u\rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition. □

Soit $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ tel que $X \sim \mathcal{N}(v, \Gamma)$. Γ est symmétrique, positive, donc diagonalisable dans $O_n(\mathbb{R})$. Il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$^t O\, \Gamma\, O \ = \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$ sont les valeurs propres non-nulles de Γ ($r = \mathrm{rg}\, \Gamma$). On pose :

$$\Delta \ = \ \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Delta} \ = \ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^t O\, \Gamma\, O &= \Delta^2 \\ \Delta\tilde{\Delta} &= \tilde{\Delta}\Delta \\ &= \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \ \ \text{(avec r fois 1)} \\ &= I_r \end{aligned}$$

Prop. $X \sim \mathcal{N}(v, \Gamma)$. On pose $Y = \tilde{\Delta}\, {}^t O\, (X - v)\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$. $Y \sim \mathcal{N}(0, I_r)$.

$Y = (Y_1, ..., Y_r, 0, ..., 0)$, où $Y_1, ..., Y_r$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$X \;=\; v + O\,\Delta\,Y$$

$Y_1, ..., Y_r$ sont les composantes indépendantes de X.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\Gamma_Y &= (\tilde{\Delta}\,{}^tO\,)\Gamma\,{}^t(\tilde{\Delta}\,{}^tO) \\
&= \tilde{\Delta}\,{}^tO\,\Gamma\,O\,\tilde{\Delta} \\
&= \tilde{\Delta}\,(\Delta^2)\tilde{\Delta} \\
&= I_r \\
\mathbb{E}[\exp\,(i\langle u, Y\rangle)] &= \exp\left(\frac{-1}{2}u_1^2 + \cdots + \frac{-1}{2}u_r^2\right) \\
&= \mathbb{E}[e^{-iu_1Y_1}]\cdots\mathbb{E}[e^{-iu_rY_r}] \\
Y &= (Y_1, ..., Y_r, 0, ..., 0)
\end{aligned}$$

$(Y_1, ..., Y_r)$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$. $\square$

Prop. $v \in \mathbb{R}^d$, $\Gamma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, Γ symmétrique positive ($\forall u \in \mathbb{R}^d, \langle u, \Gamma\,u\rangle \geqslant 0$). Alors il existe un vecteur gaussien $\mathcal{N}(v, \Gamma)$.

Preuve. On pose $X = v + O\,\Delta\,Y$, où $Y \sim \mathcal{N}(0, I_r)$. $\square$

Prop. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$, où Γ est inversible. X(la loi de X) admet une densité (par rapport à l_d) donnée par :

$$g_\Gamma(x) \;=\; \frac{1}{(2\,\pi)^{d/2}\sqrt{\det\Gamma}}\exp\left(\frac{-1}{2}\langle x, \Gamma\,x\rangle\right)$$

Preuve. Exercice. $\square$

IX.3.c. Théorème central-limite

Rappel : théorème de Paul-Lévy (version faible). Soit $\mu, \mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$ des mesures de probabilité. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu \text{ étroitement } \;\Leftrightarrow\; \forall u \in \mathbb{R}^d, \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n(u) = \hat{\mu}(u)$$

Probabilistiquement,

$$X_n \overset{\text{loi}}{\Longrightarrow} X \;\Leftrightarrow\; \forall u \in \mathbb{R}^d, \mathbb{E}[e^{iuX_n}] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[e^{iuX}]$$

Théorème central-limite. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ $\mathcal{F}$-mesurables, indépendants, de même loi, admetant un moment d'ordre 2 ($\mathbb{E}[\|X_n\|^2] < \infty$). On note :

$$X_n = \left(X_n^{(1)}, ..., X_n^{(d)}\right) : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

$$\begin{aligned}
v &= \left(\mathbb{E}\left[X_n^{(1)}\right], ..., \mathbb{E}\left[X_n^{(d)}\right]\right) \\
\Gamma &= \left(\;\operatorname{Cov}\left(X_n^{(i)}, X_{(j)}\right)\;\right)_{1\leqslant i,j\leqslant d}
\end{aligned}$$

(ces deux quantités ne dépendent pas de n).

Alors :

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)-v\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\Gamma)$$

Preuve. On fixe $u\in\mathbb{R}^d$ et on pose $Y_n=\langle u,X_n\rangle-\langle u,v\rangle$.

$(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi.

$\mathbb{E}[Y_n]=0$, $\mathrm{var}(Y_n)=\langle u,\Gamma\, u\rangle$.

On pose :

$$V_n \;=\; \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)-v\right)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\langle u,V_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1+\cdots+Y_n)\\
\hat{\mu}_{V_n} &= \mathbb{E}[\exp(i\,\langle u,V_n\rangle)]\\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{i}{\sqrt{n}}Y_1\right)\cdots\exp\left(\frac{i}{\sqrt{n}}Y_n\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{i}{\sqrt{n}}\right)Y_1\right]^n\\
&= \hat{\mu}_{Y_1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Si on pose $\mathrm{var}(Y_1)=\sigma^2$ (c'est $\langle u,\Gamma\,u\rangle$), $\hat{\mu}_{Y_1}$ est C^2 sur $\mathbb{R}$ par Taylor :

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_{Y_1}(\lambda) &= 1-\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2+o(\lambda^2)\\
\hat{\mu}_{Y_1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= 1-\frac{\sigma^2}{2\,n}\lambda^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\\
\hat{\mu}_{V_n} &= \left(\hat{\mu}_{Y_1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\\
&= \left(1-\frac{\sigma^2}{2\,n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}
\end{aligned}$$

$$\forall n\in\mathbb{R}^d,\quad \hat{\mu}_{V_n}(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-\langle u,\Gamma\,u\rangle)$$

Par Paul Lévy,

$$V_n \overset{\text{loi}}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0,\Gamma)$$

□

Énoncé dans $\mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 2. On note :

$$\begin{aligned}
m &= \mathbb{E}[X_n]\\
\sigma^2 &= \mathrm{var}(X_n)
\end{aligned}$$

(ne dépendent pas de n)

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)-m\right)\leqslant x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$$

Intervalles de confiance asymptotique. Si $S_n=X_1+\cdots+X_n$,

$$\mathbb{P}\left(m\in\left[\frac{S_n}{n}-\frac{\sigma\,x}{\sqrt{n}},\frac{S_n}{n}+\frac{\sigma\,x}{\sqrt{n}}\right]\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-\frac{1}{2}y^2}\,\mathrm{d}x$$