Compléments d'algèbre linéaire - fiche récapitulatif

LYCÉE MASSÉNA, MP* 931 *2012-2013*

On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Déf. Famille libre en dimension infinie.
Soit I un ensemble d'indices quelconques, soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

$$\mathcal{F} \text{ est libre } \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \text{ toute sous-famille finie de } \mathcal{F} \text{ est libre}$$

1 Sommes, sommes directes

Def. Somme de p sous-espaces vectoriels.

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_P = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_p, x_i \in E_i\}$$

Cet espace est un sev de E et c'est le plus petit qui contienne $E_1, E_2, \ldots$ et E_p.

Déf. Somme directe de p sev.
Les espaces $E_1, \ldots, E_p$ sont en somme directe ssi
$\forall x \in E_1 + \cdots + E_p$, $\exists!(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tels que $x = x_1 + \cdots + x_p$.
Théorème. Il est équivalent de dire :

i. $E_1, \ldots, E_p$ sont en somme directe
ii. $0 = x_1 + \cdots + x_p$ avec $\forall i, x_i \in E_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, x_i = 0$
iii. Si $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ sont des bases de $E_1, \ldots, E_p$ respectivement, alors leur concaténation est libre
iv. En dimension finine, $\dim(E_1 + \cdots + E_P) = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$

Dans ce cas, on note $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ leur somme.
Remarque : $(E_1 \oplus E_2) \oplus E_3 = E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3) = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$
Remarque : on peut créer la famille des projecteurs (p_i) associée à cette décomposition :
p_i projecteur sur E_i et de noyau $\bigoplus_{j \neq i} E_j$, on a alors $\mathrm{Id} = p_1 + \cdots + p_q$ et $\forall i, j \neq i, p_i \circ p_j = \tilde{0}$.

Prop. F et G sont en somme directe $\Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$ (ne fonctionne que pour deux sev!)

2 Théorème du rang

Théorème. Soit $f : E \to F$ une application linéaire,
alors la restriction de f à tout supplémentaire G de $\operatorname{Ker} f$ est un isomorphisme de G sur $\operatorname{Im} f$.
Conséquence. Soit $f : E \to F$ une application linéaire, où E est de dimension finie.
Alors $\operatorname{rg} f$ est fini et $\dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg} f = \dim E$.

Déf. Codimention. On dit que F est de codimension finie dans E si F possède un supplémentaire dans E de dimension finie.
Prop. Dans ce cas, tous les supplémentaires de F dans E ont la même dimension.
On appelle alors codimension de F (notée $\operatorname{codim} F$) la dimension de ces supplémentaires.
Déf. Un hyperplan de E est un sev de codimension 1.

3 Matrices

Ici $\dim E = n$
Déf. Diviseur de 0.
On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ divise 0 (à droite) si $A \neq 0$ et $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\mathrm{AB} = 0$.

De telles matrices existent car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre.
Prop. A divise 0 (à gauche ou a droite) $\Leftrightarrow$ A n'est pas inversible

Prop. Produit par bloc. On a le droit de faire le produit par blocs de décompositions en blocs de M et N dès que les tailles des blocs des deux décompositions sont compatibles.

Déf. Deux matrices M et N sont *équivalentes* si $\exists P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $N = Q^{-1} N P$
Prop. Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang
Déf. Deux matrices M et N sont *semblables* si $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $N = P^{-1} N P$
Prop. Deux matrices semblables sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases.

4 Déterminants

Ici $\dim E = n$
Prop. Toutes les formes n-linéaires alternées de E sont proportionnelles.
Déf. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
$\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$

Déf. Déterminant d'une matrice carrée.
$\det M = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_n)$, où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Déf. Cofacteur et comatrice. Soit $M = (m_{i,j})_{i,j}$ une matrice carée
On note $c_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$, où $M_{i,j}$ est le *mineur* d'indices i et j.
$c_{i,j}$ est le *cofacteur* d'indices i et j, et $\mathrm{com}\, M = (c_{i,j})_{i,j}$ est la *comatrice* de M.
Prop. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a ${}^t\mathrm{com}\, M \times M = M \times {}^t \mathrm{com}\, M = \det M \times I_n$

5 Dualité

Déf. Dual algébrique.
L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E s'appelle le *dual algébrique* de E et est noté E^*.

Déf. Soit H un sev de E, on dit que H est un hyperplan si c'est le noyau d'une forme linéaire sur E non nulle.
Prop. H est un hyperplan $\Leftrightarrow$ $\mathrm{codim}\, H = 1$ $\Leftrightarrow$ pour toute droite $D \not\subset H$, $D \oplus H = E$
Prop. Si H est un hyperplan et F un sev tel que $H \subset F$, alors $F = H$ ou $F = E$.
Prop. Si $H = \ker f_1 = \ker f_2$ où $f_1, f_2 \in E^*$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f_2 = \lambda f_1$

Déf. Formes linéaires coordonnées.
Si $\dim E = n$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)\, e_i$.
On note alors $e_i^* : x \mapsto \lambda_i(x)$, appellée i-ème forme linéaire coordonnée dans la base B.

En dimension finie. $\dim E^* = \dim E$
Déf. $\forall \mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E, $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^* appellée *base duale* de $\mathcal{B}$.
Théorème. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de E^*, alors :
$(f_1, \ldots, f_n)$ base de E^* $\Leftrightarrow$ $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i = \{0\}$
Dans ce cas il existe une unique base de E telle que $(f_1, \ldots, f_n)$ soit sa base duale, on l'appelle la base antéduale (ou préduale) de $(f_1, \ldots, f_n)$.

Prop. Tout sev F de E de dimension $\dim F = p$ s'écrit comme l'intersection des noyaux de $n - p$ formes linéaires indépendantes.
Prop. Si $(f_1, \ldots, f_{n-p})$ sont $n - p$ formes linéaires indépendantes, alors $\bigcap_{i=1}^{n-p} \mathrm{Ker}\, f_i$ est de dimension p.