Réduction - fiche récapitulatif

Lycée MASSÉNA, MP* 931 *2012-2013*

Déf. Valeurs propres, vecteurs propres.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, x est *vecteur propre* de f si $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $f(x) = \lambda x$
λ s'appelle la *valeur propre* (vp) relative à x. (x, λ) s'appelle un *couple propre* de f.
Déf. On appelle *spectre* de $f \in \mathcal{L}(E)$ et on note $\mathrm{sp}(f)$ l'ensemble de ses valeurs propres.
Prop. $0 \in \mathrm{sp}(f) \Leftrightarrow f$ non injective $\Leftrightarrow$ en dimension finie, $\det f = 0$
Prop. λ est vp de $f \in \mathcal{L}(E) \Leftrightarrow \ker(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$
On note alors $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}) = \{0\} \cup \{$vecteurs propres de f associés à $\lambda\}$
$E_\lambda(f)$ s'appelle *sous-espace propre* de f. Il est stable par f.

Même définition avec des matrices carrées (les vecteurs propres sont des matrices colonnes).
Correspondance entre les vp/$\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ de f et de sa matrice dans n'importe quelle base.
Corrolaire. Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Déf. Polynome caractéristique. On pose $\chi_M(x) = \det(x I_n - M)$,
Alors χ_M est un polynome (noté $\chi_M(X)$) appellé *polynome caractéristique* de M.
De même pour un endomorphisme f, on pose $\chi_f(X) = \det(X \mathrm{Id} - f)$.
Prop. $\chi_M(X) = X^n - \mathrm{tr}\, M X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det M$
Prop. Deux matrices semblables ont le même polynome caractéristique.

Prop. $\lambda \in \mathrm{sp}(M) \Leftrightarrow \lambda$ racine de χ_M $\qquad \lambda \in \mathrm{sp}(f) \Leftrightarrow \lambda$ racine de χ_f
Prop. En dimension n, une matrice ou un endomorphisme a au plus n valeurs propres.
Prop. Dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou en dimension impaire, un endomorphisme a au moins une valeur propre.
Prop. Pour une matrice diagonale ou triangulaire, les vp sont exactement les termes diagonaux.

Déf. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(f)$. La *multiplicité* de λ, notée m_λ, est sa multiplicité en tant que racine de χ_f
Prop. $\forall \lambda \in \mathrm{sp}(f), 1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant m_\lambda$. Si $m_\lambda = 1$, λ est *vp simple* et $\dim E_\lambda(f) = 1$.

Prop. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des vp distinctes, alors $E_{\lambda_1}(f), \ldots, E_{\lambda_p}(f)$ sont en somme directe.
Prop. Soit $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs propres associés à des vp distinctes, alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Déf. Matrice diagonalisable, endomorphisme diagonalisable.
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale.
Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *diagonalisable* si $\exists \mathcal{B}$ base de E tq $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$ est diagonale.
Prop. f diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de E formée de vecteurs propres de f (*base propre*)

Premier théorème de diagonalisation. $\dim E = n$
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (de même pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Il est équivalent de dire :

i. f est diagonalisable
ii. $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f) = E$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les vp distinctes de f
iii. $\dim E_{\lambda_1}(f) + \cdots + \dim E_{\lambda_p}(f) = n$
iv. χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \mathrm{sp}(f)$, $m_\lambda = \dim E_\lambda(f)$

Cas particulier. Si χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.

Déf. Polynomes d'endomorphismes, polynomes de matrices.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(f)$ est un *polynôme en* f (attention : $P(f) \in \mathcal{L}(E)$)
On note $\mathbb{K}[f]$ l'ensemble des polynômes en f. C'est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ appellée *algèbre des polynômes* en f. (de même avec les matrices)
Prop. Soit $f \in \mathcal{L}(E), M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$, alors $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(M) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(P(f))$

Prop. Si M est semblable à N, $P(M)$ est semblable à $P(N)$ avec la même matrice de passsage.

Prop. Si (x,λ) couple propre de f, alors $(x,P(\lambda))$ couple propre de $P(f)$.
Prop. $\forall P\in\mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(f))$ et $\mathrm{Im}(P(f))$ sont deux sev de E stables par f.

Lemme des noyaux. Dans un espace vectoriel E quelconque, soit $f\in\mathcal{L}(E)$,
soient P_1 et P_2 deux polynômes tels que $P_1\wedge P_2=1$, alors :

$$\mathrm{Ker}(P_1(f)\circ P_2(f))=\mathrm{Ker}((P_1P_2)(f))=\mathrm{Ker}(P_1(f))\oplus\mathrm{Ker}(P_2(f))$$

(généralisation à p polynômes premiers entre eux deux à deux)

Déf. Polynome annulateur. P est un *polynôme annulateur* de f si $P(f)=\tilde{0}$.
Prop. Existence. Soit E de dimension finie, alors $\forall f\in\mathcal{L}(E),\exists P\in\mathbb{K}[X]$ annulateur de f
Notons $I(f)=\{P\in\mathbb{K}[X]\,|\,P(f)=\tilde{0}\}$. $I(f)$ s'appelle l'*idéal des polynômes annulateurs* de f.
Déf. Polynome minimal. Il existe un unique polynôme Π_f unitaire de degré minimal dans $I(f)$, appellé *polynôme minimal* de f. Les autres polynômes de $I(f)$ sont tous des multiples de Π_f.

Prop. P annule $f\Leftrightarrow P$ annule $M=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}f$.
Prop. Deux matrices semblables ont les mêmes poly. annulateurs et le même poly. minimal.
Prop. Si P annule f, alors $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(f)\subset\{\mathrm{racines}_{\mathbb{C}}\,\mathrm{de}\,P\}$. De plus, $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(f)=\{\mathrm{racines}_{\mathbb{C}}\,\mathrm{de}\,\Pi_f\}$

Théorème de Cayley-Hamilton. χ_f est un polynôme annulateur de f, ie Π_f divise χ_f.

Prop. Si f est inversible, alors f^{-1} est un polynôme en f. (de même avec les matrices)

Second théorème de diagonalisation. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, il est équivalent de dire :

i. f est diagonalisable
ii. Π_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples (sars)
iii. il existe un polynôme annulateur de f qui est scindé à racines simples
iv. $\Pi_f=\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, où $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ sont les valeurs propres distinctes de f.

Prop. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ et F un sev f-stable. Notons $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit. Alors :
i.) $\mathrm{sp}(\tilde{f})\subset\mathrm{sp}(f)$ ii.) $\chi_{\tilde{f}}$ divise χ_f iii.) si $P(f)=0$, alors $P(\tilde{f})=0$
iv.) si f est diagonalisable, alors $\tilde{f}$ est diagonalisable.
Prop. Soit M triangulaire par blocs, M diagonalisable $\Leftrightarrow$ chaque bloc de la diagonale est diagonalisable.

Prop. Si A est diagonalisable, alors tout polynôme en A est diagonalisable.

Prop. Soent deux endomorphismes f et g tels que $f\circ g=g\circ f$,
Alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
Prop. Si f et g sont diagonalisables et $f\circ g=g\circ f$, alors ils ont une base propre en commun.
Réciproquement, si f et g sont simultanément diagonalisables, alors $f\circ g=g\circ f$.

Déf. Trigonalisation. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$,
on dit que f est *trigonalisable* si il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}f$ est triangulaire.
On dit qu'une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.
Théorème de trigonalisation. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, il est équivalent de dire :

i. f est trigonalisable
ii. χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$
iii. Π_f est scindé sur $\mathbb{K}$

Conséquence : dans $\mathbb{C}$, toute matrice et tout endomorphisme est trigonalisable.

Prop. $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(M)=\{0\}$. De meme pour un endomorphisme.