Suites et séries de fonctions - fiche récapitulatif

Lycée MASSÉNA, MP* 931 *2012-2013*

Soit $(f_n)_n$ une *suite de fonctions* de I dans $\mathbb{K}$.

Déf. Convergence simple. On dit que $(f_n)_n$ *converge simplement vers f sur I* si $\forall x \in I, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Dans ce cas, f s'appelle la *limite simple* de $(f_n)_n$.

Déf. Convergence uniforme. On dit que $(f_n)_n$ *cconverge uniformément vers f sur I* si la suite $\|f_n - f\|_{\infty,I} = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ converge vers 0.

Déf. Critère de Cauchy uniforme. On dit que (f_n) est *uniformément de Cauchy sur I* si
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \,|\, \forall n \geqslant N_0, \forall p \geqslant N_0, \|f_n - f_p\|_{\infty,I} \leqslant \varepsilon$
ie $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \,|\, \forall n \geqslant N_0, \forall p \geqslant N_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon$

Théorème de continuité. On suppose :
i.) $\forall n$, f_n est continue
ii.) la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I (ou sur tout compact de I)
Alors f est continue sur I.

Théorème d'intégration sur un segment. Soit $I = [a,b]$ un segment. On suppose :
i.) $\forall n$, f_n est continue sur I
ii.) $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ (tout entier)
Alors on a : $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ie : $\lim_{n\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\infty} f_n)(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème de dérivation des suites de fonctions. On suppose :
i.) $\forall n$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I
ii.) (f_n) converge simplement vers f sur I
iii.) (f_n') converge uniformément vers g sur I (ou sur tout compact de I)
Alors : f est $\mathcal{C}^1$ sur I, $f' = g$,
et la suite $(f_n)_n$ est en fait uniformément convergente sur I (ou sur tout compact de I)

Théorème de dérivation itérée. On suppose :
i.) $\forall n$, f_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I
ii.) $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement vers g_k
iii.) $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément vers g_p sur I (ou sur tout compact de I),
Alors : $f = g_0 = \lim_{n\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$, $\forall k \in [\![0, p]\!]$ on a $f^{(k)} = g_k$,
et toutes les convergences simples sont en fait uniformes sur I (ou sur tout compact de I)

Théorème d'interversion de limites (double limite). $I = [a, b[$ $(b \in \bar{\mathbb{R}})$. On suppose :
i.) $\forall x$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} l_n$ $(l_n \in \mathbb{R})$
ii.) (f_n) CVU vers f sur un voisinnage de b, ie sur un intervalle de la forme $[c, b[$
Alors : $(l_n)_n$ a une limite $l \in \mathbb{R}$ en $n \to +\infty$, et $\lim_{x\to b^-} f(x) = l$.

Approximation uniforme par des fonctions en escaliers.
Soit $I = [a,b]$ un segment et f continue par morceaux sur $[a,b]$.
Alors il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Théorème de Weierstrass.
Toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Théorème de Weierstrass trigonométrique.

Toute fonction continue et 2π-périodique est limite uniforme sur $[0, 2\pi]$ d'une suite de polynômes trigonométriques (ie de fonctions de la forme $a_0 + a_1 \cos(x) + \cdots + a_n \cos(n\,x) + b_1 \sin(x) + \cdots + b_p \sin(p\,x)$)

On peut facilement transposer ces définitions et théorèmes aux séries de fonctions, en introduisant la notion de *convergence normale* :

Soit $(u_n)_n$ une *suite de fonctions* de I dans $\mathbb{K}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$

Déf. CVS pour une série. On dit que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge simplement sur I* si
$\forall x_0 \in I,$ la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x_0)$ converge.

Déf. CVU pour une série. On dit que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge uniformément sur I*
lorsque la suite S_n converge uniformément vers f sur I.
Prop. Lorsque $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVS, posons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)\ \forall x \in I$. R_n CVS vers $\tilde{0}$ sur I.
Alors : $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVU sur $I \Leftrightarrow R_n$ CVU vers $\tilde{0}$ sur I.

Déf. Convergence normale. On suppose que chaque fonction u_n est bornée sur I.
On dit que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge normalement sur I* si $\sum_{n\geqslant 0} \|u_n\|_\infty$ converge.
Prop. La convergence normale implique la convergence uniforme.

Théorème de continuité. Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série de fonctions sur I. On suppose :
i.) $\forall n, u_n \in \mathcal{C}^0(I)$
ii.) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVU sur I (ou sur tout compact de I)
Alors : $f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \in \mathcal{C}^0(I)$

Théorème d'intégration terme à terme (V1). Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série de fonction ssur un *segment* $[a, b]$. On suppose :
i.) $\forall n, u_n \in \mathcal{C}^0([a, b])$
ii.) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVU sur le segment $[a, b]$ vers f
Alors : la série de terme général $\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème de dérivation terme à terme. On suppose :
i.) $\forall n, u_n \in \mathcal{C}^1(I)$
ii.) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur I
iii.) $\sum_{n\geqslant 0} u_n'$ CVU sur I (ou sur tout compact de I)
Alors : $f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \in \mathcal{C}^1(I)$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVU(K) sur I et $f' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'$ sur I.
De même on a la version $\mathcal{C}^k$ du théorème.

Théorème d'interversion limites-séries (double-limite). $I =]a, b]$ $(a \in \bar{\mathbb{R}})$. On suppose :
i.) $\forall n, u_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha_n$
ii.) La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge sur un voisinnage de a (ie un intervalle de la forme $]a, c]$)
Alors : $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge, $f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ a une limite en a, et $\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$.