# Applications dérivables - fiche récapitulatif

Lycée MASSÉNA, MPSI 832 *2011-2012*

## 1 Formules de dérivation

### 1.1 Produit de $p$ fonctions

Soit $(f_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in (\mathfrak{F}(I,\mathbb{R}))^p$, avec $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f_i$ dérivable en $a$. Alors $\prod_{i=1}^{p} f_i$ est dérivable en $a$, et :

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{p} f_i\right)'(a) &= \sum_{i=1}^{p} f_1(a)f_2(a)\cdots f_{i-1}(a)f_i'(a)f_{i+1}(a)\cdots f_p(a) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(f_i'(a)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} f_j(a)\right)
\end{aligned}$$

### 1.2 Inverse

Si $f$ dérivable en $a$ et si $f(a)\neq 0$, alors $f$ ne s'annule pas au voisinage de $a$ et $\frac{1}{f}$ est dérivable en $a$, et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{f^2(a)}$$

### 1.3 Composition

Si $f$ dérivable sur $I$, et $g$ dérivable sur $J$ avec $f(I)\subset J$, alors $g\circ f$ est dérivable sur $I$ et

$$\forall a\in I,\ \ (g\circ f)'(a) = f'(a)\,g'(f(a))$$

### 1.4 Bijection réciproque

Soit $f : I \to f(I)$ bijective, continue. Soit $b\in f(I)$.
Si $f$ dérivable en $f^{-1}(b)$, alors : $f^{-1}$ dérivable en $b$ ssi $f'(f^{-1}(b))\neq 0$. On a alors :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Dans le cas d'un intervalle : si $f : I\to f(I)$ est bijective, dérivable, avec $\forall x\in I$, $f'(x)\neq 0$,
alors $f^{-1}$ est dérivable sur $f(I)$, et la formule ci-dessus est valable $\forall b\in f(I)$.

### 1.5 Dérivées successives : formule de Liebniz

Soit $(f,g)\in C^n(I,\mathbb{R})^2$, alors $fg\in C^n(I,\mathbb{R})$ et $(fg)^{(n)} = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}g^{(n-k)}$

## 2 Théorème de Rolle, théorème des acroissements finis

**Proposition 1.** *Soit $f : I\to\mathbb{R}$ dérivable en $a\in\dot{I}$*
*Si $f$ présente en $a$ un extrémum local, alors $f'(a)=0$.*

### 2.1 Théorème de Rolle

**Théorème 2.** *Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, avec $a<b$. Soit $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})$, avec $f$ dérivable sur $]a,b[$.*

$$\textit{Si } f(a)=f(b),\ \textit{alors } \exists c\in\,]a,b[\ \ \textit{tel que}\ \ f'(c)=0$$

### 2.2 Théorème des acroissements finis

**Théorème 3.** *Soit* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$*, avec* $a<b$*. Soit* $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})$*, avec* $f$ *dérivable sur* $]a,b[$*.*

$$\begin{aligned} \exists c\in]a,b[ \quad \textit{tel que} \quad & f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a) \\ \textit{ou encore} \quad & \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \end{aligned}$$

Autre écriture : soit $f\in C^0([a,a+h],\mathbb{R})$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $h>0$, et $f$ dérivable sur $]a,a+h[$

$$\exists\alpha\in]0,1[ \ \text{ tel que } \ f'(a+\alpha h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

### 2.3 Inégalité des acroissements finis

Soit $f\in C^0(I,\mathbb{R})$, $f$ dérivable sur $\dot{I}$, $f'$ bornée sur $\dot{I}$,

$$\begin{aligned} \text{si} \quad & \exists M\in\mathbb{R},\forall x\in\dot{I},|f'(x)|\leqslant M \\ \text{alors} \quad & \forall(x,y)\in I^2,|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y| \end{aligned}$$

## 3 Étude des suites définies par $u_{n+1}=f(u_n)$

### 3.1 Propriétés

Ici $f: A\to A$, où $A$ est un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit $u_0\in A$ et $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=f(u_n)$.

$$\text{alors } \ \forall n\in\mathbb{N},u_n\in A$$

Si $f: I\to I$, où $I$ intervalle de $\mathbb{R}$,
Soit $l\in I$. Soit $(u_n)$ définie par $u_0\in I$ et $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=f(u_n)$

$$\begin{aligned} \text{si} \quad & u_n\to l \quad \text{et si } f \text{ continue en } l \\ \text{alors} \quad & f(l)=l \end{aligned}$$

### 3.2 Monotonie

Soit $f: I\to I$, avec $I$ intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $u_0\in I$ et $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=f(u_n)$.

Si $f$ est croissante alors $(u_n)$ est monotone
plus précisément : $(u_n)$ croissante si $u_0<u_1$
$(u_n)$ décroissante si $u_0>u_1$

Si f est décroissante alors $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones et de monotonie contraire

Ici, $f:[a,b]\to[a,b]$. Soit $u_0\in[a,b]$ et $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=f(u_n)$.
Si $f$ est croissante, alors $(u_n)$ converge.
Si $f$ est décroissante, alors $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent.

### 3.3 Théorème du point fixe de Cauchy

**Théorème 4.** *Soit I un intervalle non vide fermé de* $\mathbb{R}$*. (*$I=[a,b]$ ou $I=[a,+\infty[$ ou $I=]-\infty,b]$*)*
*Soit* $f: I\to I$ *une application k-lipschitzienne avec* $k\in[0,1[$
*Alors f admet un unique point fixe dans I,*
*Et toute suite définie par* $u_0\in I$ *et* $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=f(u_n)$ *converge vers ce point fixe.*

**Corollaire 5.** *Ici I est un intervalle fermé. Soit* $f: I\to I$ *dérivable sur* $\dot{I}$*,*
*et f telle que :* $k=\sup\limits_{x\in I}|f'(x)|<1$
*Alors f possède un unique point fixe sur I,*
*Et toute suite définie par* $u_0\in I$ *et* $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=f(u_n)$ *converge vers ce point fixe.*