Dimension finie - fiche récapitulatif

Lycée MASSÉNA, MPSI 832 *2011-2012*

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel.

1 Familles libres et liées, bases

Définition. *Soit* $n \geqslant 1, (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in E^n$,

$$\begin{aligned}
(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ est liée } &\Leftrightarrow \exists i \in [\![1,n]\!] \text{ tq } x_i \text{ soit combinaison linéaire de } (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]-\{i\}} \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in K^n - \{0_{K^n}\} \text{ tq } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \\
(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ est libre } &\Leftrightarrow \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n), \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i = 0\right)
\end{aligned}$$

Définition. *Une base d'un K-ev est une famille libre génératrice de cet ensemble.*
Dans une base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p) \in E^p, \forall x \in E, \exists!(\alpha_1,\dots,\alpha_p) \in K^p$ *tq* $x = \sum\limits_{i=1}^p \alpha_i e_i$.

Théorème. *Soit F un K-espace vectoriel, soit* $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$, *soit* $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$.
Si $(x_1,\dots,x_n)$ *est liée, alors* $(f(x_1),\dots,f(x_n))$ *est liée.*
Si $(x_1,\dots,x_n)$ *est libre et si f est injective, alors* $(f(x_1),\dots,f(x_n))$ *est libre.*
Si $(x_1,\dots,x_n)$ *est une famille génératrice de E, alors* $(f(x_1),\dots,f(x_n))$ *engendre* $\operatorname{Im} f$.

Théorème. *Soit* $(e_1,\dots,e_n)$ *une base de E, soit F un K-ev, soit* $(y_1,\dots,y_n) \in F^n$
$\exists! f \in \mathcal{L}_K(E,F)$ *tq* $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = y_i$. *De plus :*
f est injective ssi $(y_1,\dots,y_n)$ *est libre, f est surjective ssi* $(y_1,\dots,y_n)$ *engendre F,*
f est bijective ssi $(y_1,\dots,y_n)$ *est une base de F.*

Proposition. *Si* $(e_1,\dots,e_n)$ *est libre et si* $(e_1,\dots,e_n,x)$ *est liée, alors* $x \in \operatorname{vect}_K(e_1,\dots,e_n)$.

2 Dimension d'un *K*-espace vectoriel

Lemme. *Dans un K-ev engendré par n vecteurs* ($n \geqslant 1$), *toute famille de* $n+1$ *vecteurs est liée.*
Conséquence : dans un tel K-ev, toute famille libre a au plus n éléments.

Théorème. *Soit E un K-ev différent de* $\{0\}$ *ayant une famille génératrice finie,*
Soit L_0 *(resp.* G_0*) une famille libre (resp. génératrice) de E tq* $L_0 \subset G_0$,
Alors $\exists B$ *base de E tq* $L_0 \subset B \subset G_0$.

Corollaire. *Soit* $E \neq \{0\}$ *un K-ev ayant une famille génératrice finie. Alors E admet des bases :*

a) *Toute famille libre de E est contenue dans une base (théorème de la base incomplète)*

b) *Toute famille génératrice de E contient une base.*

Définition. *On dit qu'un K-ev est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.*
Déf. équivalente : Si $E \neq \{0\}$, *E est un K-ev de dimension finie ssi il admet une base (finie).*

Définition. *Soit* $E \neq \{0\}$ *un K-ev de dimension finie,*
Alors toutes les bases de E ont le meme cardinal. Il est appellé $\dim_K(E)$.
Par convension, si $E = \{0\}$, *alors* $\dim_K(E) = 0$.

Proposition. *Soient E et F deux K-ev de dimension finie,*
E et F sont isomorphes ssi ils ont la meme dimension.

Proposition. *Soit E un K-ev de dimension finie, soit F un K-ev, soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$*
Si f est bijective alors F est de dimension finie et $\dim_K(F) = \dim_K(E)$.

Proposition. *Soit E un K-ev de dimension $n \geqslant 1$,*
Toute famille libre de E a au plus n éléments, et est une base de E ssi elle a n éléments.
Toute famille génératrice de E a au moins n éléments, et est une base de E ssi elle a n éléments.

Théorème. *Soit E un K-ev de dimension finie n,*
Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie,
De plus $\dim_K(F) \leqslant \dim_K(E)$, et $\dim_K(F) = \dim_K(E) \Leftrightarrow F = E$.

Proposition. *Soit E un K-ev de dimension finie n, soit F un sev de E.*
$\exists S$ sev de E tq $F \oplus S = E$. On dit que F admet un supplémentaire dans E.

Théorème. *Soit E un K-ev de dimension finie, soit F et G deux sev supplémentaires de E,*
alors $\dim_K(E) = \dim_K(F) + \dim_K(G)$.

Théorème. *Soit F et G deux sev de E. Si F et G sont de dimension finie,*
alors $F + G$ aussi, et $\dim_K(F+G) = \dim_K(F) + \dim_K(G) - \dim_K(F \cap G)$.

Proposition. *Soit E un K-ev de dimension finie, soit F et G deux sev de E,*
$F \oplus G = E \Leftrightarrow \dim_K E = \dim_K F + \dim_K G$ et $F \cap G = \{0\}$.

3 Rang d'une application linéaire, d'une famille de vecteurs

Définition. *Ici E est un K-ev de dimension finie, F est un K-ev quelconque.*
Soit $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$, alors $\operatorname{Im} f$ est un sev de F de dimension finie.
On appelle rang de f et on note $\operatorname{rg} f$ la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Théorème. *Soit E un K-ev de dimension finie, soit F un K-ev quelconque, soit $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$*

$$\operatorname{rg} f + \dim_K(\ker f) = \dim_K E$$

Proposition. *Soit E un K-ev de dimension finie, soit F et G deux K-ev quelconques,*

1. *Soit $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$ et soit g un isomorphisme de F dans G, alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(g \circ f)$.*
2. *Ici G est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$ et g un isomorphisme de G dans E, alors $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg} f$.*

Définition. *Soit $(v_1, \ldots, v_p) \in E^p$.*
On appelle rang de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ et on note $\operatorname{rg}(v_1, \ldots, v_p)$ la dimension de $\operatorname{vect}(v_1, \ldots, v_p)$.

Proposition. $\operatorname{rg}(v_1, \ldots, v_p) \leqslant p$ *et* $\operatorname{rg}(v_1, \ldots, v_p) = p \Leftrightarrow (v_1, \ldots, v_p)$ *est libre.*

Théorème. *Soit $(v_1, \ldots, v_p) \in E^p$, soit $j \in [\![1, p]\!]$, on pose $v'_j = v_j + \sum_{i=1, i \neq j}^{p} \alpha_i v_i$.*
Alors $\operatorname{vect}(v_1, \ldots, v_p) = \operatorname{vect}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v'_j, v_{j+1}, \ldots, v_p)$.

Théorème. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, soit $p \in [\![1, n]\!]$, soit $(v_1, \ldots, v_p) \in E^p$,*
On suppose que $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $v_j = \sum_{i=j}^{n} \alpha_{i,j} e_i$ et $\alpha_{j,j} \neq 0$. Alors la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre.

Définition. *Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$.*
On appelle hyperplan de E tout sev de E de dimension $n-1$.

Théorème. *Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, soit $H \subset E$,*
H est un hyperplan de E $\Leftrightarrow$ H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.