Développements limités - fiche récapitulatif

LYCÉE MASSÉNA, MPSI 832 *2011-2012*

1 Formules de Taylor

1.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$,

$$f(b) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\,\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{dt}$$

1.2 Formule de Taylor-Young

Soit $f \in C^n(I,\mathbb{R})$, soit $a \in I$

alors f admet un $\mathrm{DL_n(a)}$ donné par la formule :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

2 Développements limités à connaître

Voici un récapitulatif des $\mathrm{DL_n}(0)$ de fonctions usuelles à connaître par coeur :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})
\end{aligned}$$

(pour $\cos(x)$, on pourrait écrire $\ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$, ce qui est équivalent)

$$\sin(x) \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

(pour $\sin(x)$, on pourrait écrire $\ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$, ce qui est équivalent)

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha\,x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\\
(\alpha \text{ fixé}, \ \alpha \neq 0)&\\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)
\end{aligned}$$

Pour obtenir le $\mathrm{DL_n(a)}$ des fonctions usuelles, on fait un changement de variable pour se rammenner en 0. On peut aussi utiliser la formule de Taylor-Young. Pour référence :

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)\\
\mathrm{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\\
\mathrm{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})
\end{aligned}$$