Intégration - fiche récapitulatif

Lycée MASSÉNA, MPSI 832 *2011-2012*

1 Intégalité de la moyenne, égalité de la moyenne

- Soit $(f,g)\in\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, alors $\left|\int_a^b fg\right|\leqslant\|g\|_\infty\int_a^b f$
- Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $g\in\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R}^+)$, alors $\exists c\in[a,b]$ tq $\int_a^b fg=f(c)\int_a^b g$

2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(f,g)\in\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})^2$, alors $\left|\int_a^b fg\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2\int_a^b g^2}$

3 Théorème fondamental

- Soit $f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, alors f admet des primitives définies sur I.
  De plus si $a\in I$, $x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
  $\forall G$ primitive de f, $G(x)-G(a)=[G(t)]_a^x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$
- Corrolaire : soit $f\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors $\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t=[f(t)]_a^b$

4 Intégration par partie - changement de variable

- Soit $(f,g)\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})^2$, soit $(a,b)\in I^2$, $\int_a^b f'g=[fg]_a^b-\int_a^b fg'$
- Soit $\varphi\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, soit $f\in\mathcal{C}^0(\varphi([a,b]),\mathbb{R})$, alors $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u$
  concrètement : on pose $u=\varphi(t)$, on écrit $\mathrm{d}u=\varphi'(t)\mathrm{d}t$, $f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ devient $f(u)\mathrm{d}u$
  on n'oublie pas de changer les bornes !

5 Formules de Taylor

- **Taylor avec reste intégral :**
  Soit $f\in C^n([a,b],\mathbb{R})$,
  $$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$
- **Inégalité de Taylor-Lagrange :**
  Soit $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$, soit $(a,b)\in I^2$ avec $a\neq b$, soit $M=\sup_{t\in[\widetilde{a,b}]}\left|f^{(n+1)}(t)\right|$
  $$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}$$
- **Taylor-Young :**
  Soit $f\in C^n(I,\mathbb{R})$, soit $a\in I$, alors f admet un $\mathrm{DL_n(a)}$ donné par la formule :
  $$\forall x\in I,\, f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

6 Primitives à connaitre

- $\int_a^b\frac{1}{t^2+c^2}\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{c}\arctan\left(\frac{t}{c}\right)\right]_a^b$
- $\int_a^b\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=[\arcsin(t)]_a^b$ avec $(a,b)\in\,]-1,1[^2$
- $\int_a^b\frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t=[\ln|f(t)|]_a^b$

- si $n \geqslant 2$, $\int_a^b \frac{f'(t)}{(f(t))^n}\,\mathrm{dt} = \left[\frac{-1}{(n-1)\,(f(t))^{n-1}}\right]_a^b$

7 Intégration de fractions rationnelles

Pour intégrer une fraction rationnelle F sur un intervalle de son ensemble de définition, on effectue une décomposition en éléments simples.

La partie entière et les termes de la forme $\int_a^b \frac{\alpha}{(t-x_0)^n}\,\mathrm{dt}$ s'intègrent sans problème.

Les termes difficiles à intégrer sont de la forme $G_n = \int_a^b \frac{\alpha\,t+b}{(t^2+p\,t+q)}\,\mathrm{dt}$ avec $p^2-4q<0$ et $n \geqslant 1$.

On décompose $G_n = \int_a^b \frac{\alpha}{2}\,\frac{2t+p}{(t^2+\mathrm{pt}+q)^n}\,\mathrm{dt} + \int_a^b \frac{\beta - p\,\frac{\alpha}{2}}{(t^2+p\,t+q)^n}\,\mathrm{dt}$

On doit alors intégrer $J_n = \gamma \int_a^b \frac{\mathrm{dt}}{(t^2+p\,t+q)}\,\mathrm{dt} = \int_a^b \frac{\mathrm{dt}}{\left(\left(t-\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}$ avec $q-\frac{p^2}{4}>0$

On pose $u = t+\frac{p}{2} = \varphi(t)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathrm{du}=\mathrm{dt}$, $J_n = \int_{a+\frac{p}{2}}^{b+\frac{p}{2}} \frac{\mathrm{du}}{(u^2+c^2)^n}$ avec $c^2 = q-\frac{p^2}{4}$.

Si $n=1$ on utilise arctan. Sinon, on cherche une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1} par IPP.

8 Règles de bioche

On doit intégrer $x \mapsto F(\cos x, \sin x)$ sur $[a,b]$ avec F fonction rationnelle à deux variables.

Pour cela, on fait un changement de variable pour se rammenner à une fraction rationnelle en u :

- Si la transformation $x \mapsto -x$ ne change pas $F(\cos x, \sin x)\mathrm{dx}$, on pose $u = \cos x$.
- Si la transformation $x \mapsto \pi - x$ ne change pas $F(\cos x, \sin x)\mathrm{dx}$, on pose $u = \sin x$.
- Si la transformation $x \mapsto \pi + x$ ne change pas $F(\cos x, \sin x)\mathrm{dx}$, on pose $u = \tan x$.
- Si aucune de ces règles ne fonctionne, on pose le changement de variable $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

  Rappel : on a alors $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(x) = \frac{2\,u}{1+u^2}$.

Dans le cas d'une fonction rationnelle en ch, sh et th : on remplace chaque ch par cos, chaque sh par sin, chaque th par tan, et on utilise les règles de bioche :

- Si $x \mapsto -x$ fonctionne, on pose $u = \mathrm{ch}(x)$.
- Si $x \mapsto \pi - x$ fonctionne, on pose $u = \mathrm{sh}(x)$.
- Si $x \mapsto \pi + x$ fonctionne, on pose $u = \mathrm{th}(x)$.
- Sinon, on pose $u = e^x$.

9 Intégration de $x \mapsto F(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c})$

Avec $a \neq 0$, $b^2-4\,a\,c \neq 0$, F fraction rationnelle à deux variables

$P(x) = a\,x^2+b\,x+c = a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4\,a} = a\left(\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{d}{a}\right)$ avec $d = c-\frac{b^2}{4\,a}$

Si $\frac{d}{a}>0$, on pose $\delta = \sqrt{\frac{d}{a}}$ et $u = \frac{\left(x+\frac{b}{2\,a}\right)}{\delta}$, on a alors $P(x) = a\,(\delta^2 u^2+\delta^2) = a\,\delta^2\,(u^2+1)$.

Si $\frac{d}{a}<0$, on pose $\delta = \sqrt{\frac{-d}{a}}$, on se ramène à $P(x) = a\,\delta^2\,(u^2-1)$.

On se retrouve dans un des cas suivants :

- $\sqrt{1-u^2}$: on pose $u = \cos t$
- $\sqrt{u^2-1}$: on pose $u = \pm \mathrm{ch}\, t$ (selon le domaine d'intégration)
- $\sqrt{1+u^2}$: on pose $u = \mathrm{sh}\, t$

On se ramène alors à un des cas précédents.