Polynômes - fiche récapitulatif

LYCÉE MASSÉNA, MPSI 832 *2011-2012*

Lemme 1. *Soit* $a \in K$, *soit* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in K^{n+1}$ *tel que* $\lambda_0 + \lambda_1(X-a) + \cdots + \lambda_n(X-a)^n = 0$
Alors $\forall i \in [\![0, n]\!], \lambda_i = 0$.

1 Dérivation

Définition 2. *Soit* $P \in K[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $(n \geqslant 1)$

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k X^{k-1}$$

Par convention $P' = 0$ *lorsque* $n = 0$.

Remarque 3.

$$((X-a)^n)^{(p)} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!}(X-a)^{n-p} \text{ si } p \leqslant n \\ 0 \text{ si } p > n \end{cases}$$

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Théorème 4. ***Formule de Taylor :*** *Soit* $P \in K[X] - \{0\}$, *soit* $a \in K$, *soit* $n = \deg P \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \end{aligned}$$

(si P est nul $(P = 0)$*, la dernière formule est vraie.)*

Théorème 5. *Soit* $a \in K$, *soit* $P \in K[X] - \{0\}$, *soit* $k \geqslant 1$,

$$a \text{ est racine de } P \text{ d'ordre } k \Leftrightarrow \begin{cases} P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0 \\ P^{(k)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

2 $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

Tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$ de degré $\geqslant 1$ a une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 6. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$,

$$\exists!\, \lambda \in \mathbb{C}^*, \exists!\, r \in \mathbb{N}, \exists!\, (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{C}^r, \exists!\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r, \text{ tq } P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{\alpha_i}$$

Proposition 7. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$, *soit* $a \in \mathbb{C}$,
a racine de P d'ordre k $\Leftrightarrow$ $\bar{a}$ *racine de* $\bar{P}$ *d'ordre k.*
Si $P \in \mathbb{R}[X]$, *a racine de P d'ordre k* $\Leftrightarrow$ $\bar{a}$ *racine de P d'ordre k.*

3 Relation coefficients-racines

Théorème 8. *Soit* $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} (X - a_i) &= X^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k(a_1, \ldots, a_n)\, X^{n-k} \\ \text{avec } \sigma_k(a_1, \ldots, a_n) &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}\end{aligned}$$

σ_k est appellée fonction symétrique élémentaire d'ordre k.

Théorème 9. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X], \deg P = n$
$P = c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \cdots + c_0$
Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$(a_1, \ldots, a_n) \text{ sont les racines de } P \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \sigma_k(a_1, \ldots, a_n) = (-1)^k \frac{c_{n-k}}{c_n}$$

4 Fractions rationnelles - décomposition en éléments simples

Définition 10. *Soit* $F \in K(X), F = \frac{A}{B}, (A, B) \in K[X] \times (K[X] - \{0\})$
$\deg F = \deg A - \deg B, \deg F \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$

Définition 11. *Soit* $F \in K(X), F = \frac{A}{B}, (A, B) \in K[X] \times (K[X] - \{0\}), A \wedge B = 1$
On appelle racines de F les racines de A. On appelle pôles de F les racines de B.

Théorème 12. *Soit* $F \in K(X)$
$\exists! E \in K[X]$ *tel que* $\deg(F - E) < 0$. *E est appellé partie entière de F.*

Théorème 13. *Soit* $F \in K(X)$, *soit a un pôle de F de multiplicité n,*

$$\exists!\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n,\ \exists! G \in K(x) \text{ tel que } F = G + \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{(X - a)^i}$$

Avec G une fraction rationnelle n'ayant pas a pour pôle, et ayant les mêmes autres pôles que F avec la même multiplicité. $\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{(X-a)^i}$ *est appellé partie pôlaire de F associée au pôle a.*

Remarque 14. Soit a un pôle simple de $F \in K(X)$,

- Si $F = \frac{A}{B(X - a)}$ (écriture irréductible), avec $A(a) \neq 0$ et $B(a) \neq 0$,
  alors la partie polaire associée au pôle a est $\frac{A(a)}{B(a)(X - a)}$.
- Si $F = \frac{C}{D}$ avec $C(a) \neq 0$ et a racine simple de d,
  alors la partie polaire associée au pôle a est $\frac{C(a)}{D'(a)(X - a)}$.

Théorème 15. *Soit* $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{C}(X), A \wedge B = 1$. $B = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - b_i)^{\alpha_i}$,

$$\exists! E \in K[x], \forall i \in [\![1, n]\!], \exists!\, (a_{i,j})_{j \in [\![1, \alpha_i]\!]} \in K^{\alpha_i} \text{ tel que } F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{a_{i,j}}{(X - b_i)^j}$$

Ceci est la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

Théorème 16. *Soit* $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{R}(X), A \wedge B = 1$.
$B = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{\alpha_k} \prod_{k=1}^{p} (X^2 + b_k X + c_k)^{\beta_k}$, *avec* $\forall k \in [\![1, p]\!], b_k^2 - 4\, c_k < 0$

$$\exists! E \in \mathbb{R}[x], \forall i \in [\![1, n]\!], \exists!\, (d_{i,j})_{j \in [\![1, \alpha_i]\!]} \in \mathbb{R}^{\alpha_i}, \forall i \in [\![1, p]\!], \exists!\, ((e_{i,j}), (f_{i,j}))_{j \in [\![1, \beta_i]\!]} \in (\mathbb{R}^{\beta_i})^2$$

$$\text{tels que } F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{d_i}{(X - a_i)^j} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{e_{i,j} X + f_{i,j}}{(X^2 + b_i X + c_i)^j}$$

Ceci est la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.